



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Tarefa: Medindo com barras *Cuisenaire* (parte 2)

Conteúdo: Operações com Números racionais (não negativos)

Fonte: OLIVEIRA, V. S. D. **Ensino Exploratório de Matemática e tecnologias digitais:** Um olhar para a aprendizagem de frações na perspectiva da medição no contexto do ensino remoto. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual do Paraná. Campo Mourão, 2021. Disponível em: <http://prpgem.unespar.edu.br/dissertacoes/resumos/vania-sara-doneda-de-oliveira>

TAREFA MEDINDO COM BARRAS *CUISENAIRE* (PARTE 2)

- c) Na primeira parte da tarefa vocês encontraram combinações de barras de cores iguais que fossem do mesmo tamanho das barras escolhidas pelo grupo. Agora, as combinações de barras também podem ser de cores diferentes. Mas observe que uma combinação de barra vermelha + verde clara é diferente de uma combinação verde clara + vermelha.
- O grupo deve escolher uma barra e descobrir quantas combinações de barras é possível formar que sejam do mesmo tamanho da barra escolhida. Depois, escrevam o máximo de representações matemáticas de equivalências possíveis.
- d) Observem as combinações de barras formadas que são do mesmo tamanho que a barra escolhida pelo grupo. Representem por meio de frações e utilizando os símbolos < e > as comparações entre as barras de cada combinação.

PLANO DE AULA E QUADRO DE ORIENTAÇÕES

Duração:

- no mínimo 90 minutos e no máximo 130 minutos para a fase de introdução da tarefa e realização da tarefa
- no mínimo 40 minutos e no máximo 90 minutos para as fases de discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens

Unidade temática:

- Números e Álgebra



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Objetos de conhecimento:

- Números racionais (não negativos)

Conteúdo:

- Operação com Números racionais (não negativos)

Ano de escolaridade:

- 6º ano do Ensino Fundamental Anos Finais

Objetivos:

- Comparar frações;
- Compreender adição e subtração de frações de mesma unidade de medida.

Recursos:

Internet, tarefa em arquivo pdf, Google Meet para reunião, Google Sala de aula, site com *applet* das barras *Cuisenaire*, mesa digitalizadora.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será desenvolvida na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM) que consiste em uma abordagem de ensino e aprendizagem centrado no aluno e diferente do ensino tradicional. Isto porque as práticas do EEM são orientadas por quatro dimensões: o *inquiry*, a reflexão, a comunicação e a colaboração. O *inquiry* admite que a aprendizagem ocorre na interação entre aquilo que é conhecido e desconhecido e; por meio de situações didáticas que conduzem à reflexão. A comunicação se apoia na interação social, e sustenta-se no diálogo entre professores e alunos para expressar ideias matemáticas e negociar significados. E a colaboração articula todas as demais dimensões por meio de diálogos inquiridores que promovem a reflexão e a comunicação, no qual o conhecimento matemático é (re)elaborado para a resolução da tarefa.

Assim, o professor possui papel ativo durante todo o desenvolvimento da aula, mas de natureza diferente do ensino dito tradicional, isto porque além da escolha e preparo criterioso das tarefas, suas atitudes, comportamento e a forma de gerir e conduzir a aula demandam atenção e cuidado. Nesse sentido, a fim de orientar e organizar as ações do professor, os



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



pesquisadores Canavarro, Oliveira e Menezes (2013) sugerem a aula em fases que Cyrino e Teixeira (2015) admitem como sendo quatro fases:

1ª) *Introdução da tarefa.* É o momento em que o professor explica como será o desenvolvimento da aula, a organização dos grupos, a forma como a tarefa será desenvolvida, o que acontecerá em cada fase seguinte bem como o tempo das fases de desenvolvimento e socialização da tarefa com a turma, quais os recursos disponíveis para auxiliar na resolução da tarefa, as formas de registro, como serão avaliados, além de estabelecer objetivos, procurando motivar e engajar os alunos para a resolução da tarefa.

2ª) *Realização da tarefa.* Nesta fase os alunos resolvem a tarefa em pequenos grupos, trocam ideias, estratégias, conhecimento matemático. O professor é bastante ativo, mas de forma diferente de uma aula tradicional. Para que essa fase seja bem-sucedida é indispensável que o professor se prepare antes de desenvolver essa fase em sala de aula. Essa preparação é no sentido de antecipar ideias, situações, dúvidas, conjecturas, equívocos, estratégias de resoluções dos alunos para que o professor saiba como agir e não valide ou refute ideias.

3ª) *Discussão coletiva da tarefa.* Para esse momento o professor deve selecionar, sequenciar e prever quais conexões estabelecer entre os grupos que apresentarão as resoluções da tarefa para a turma toda. O intuito é que toda a turma compreenda explicações e estratégias de resolução, sejam estas corretas ou não, para que na troca coletiva, novas negociações de significados possam emergir, promovendo a reflexão sobre as conclusões alcançadas.

4ª) *Sistematização das aprendizagens.* O papel do professor é planejar, estruturar e organizar as aprendizagens. Não basta sintetizar ideias, mas sim sistematizar e institucionalizar as aprendizagens matemáticas envolvidas em um processo de (re)construção com todos os sujeitos da sala de aula. Para isso, é importante que o professor solicite que os alunos façam os registros da sistematização, para que possam consultá-los para estudo ou utilizá-los em outras situações.

Optamos pela seguinte organização: a 1ª e 2ª fase ocorrerão com grupos de 3 a 6 alunos. Essas fases serão realizadas em sequência, em um mesmo dia, sendo necessários no mínimo 90 minutos e no máximo 130 minutos. Já para a 3ª e 4ª fase serão necessários no mínimo 40 minutos e no máximo 90 minutos e serão realizadas com todos os alunos. As duas últimas fases ocorrerão em sequência, em um mesmo dia, mas em dia diferente da 1ª e 2ª fase.

(1) Introdução da tarefa



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



A professora iniciará a reunião via Google Meet explicando como será o desenvolvimento da aula, o tempo, a organização, recursos disponíveis, as fases seguintes de Realização da tarefa e Discussão coletiva da tarefa, além da forma de registro e a forma de avaliação. Será explicado aos alunos que todas as aulas serão gravadas, como lhes foi explicado na carta de informações ao sujeito de pesquisa, quando os alunos assinaram o termo de assentimento e os pais o termo de consentimento. Será ressaltada a importância do registro escrito, digitado ou fotografado e bem detalhado pelo grupo, já que alguns irão compartilhar e apresentar suas resoluções com a turma, no momento da fase de Discussão coletiva da tarefa. Após essa explicação será disponibilizada a tarefa ao grupo.

(2) Realização da tarefa

Com o objetivo de nortear o desenvolvimento da tarefa prevendo possíveis ações por parte dos alunos e do professor, a perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática prevê a utilização de um quadro de antecipação/orientação para cada tarefa proposta. A professora usará o quadro de antecipação como referência de como (re)agir, o que esclarecer, como questionar sobre as estratégias de resolução da tarefa, como pedir justificativas para que os objetivos da tarefa sejam atingidos.

- c) Na primeira parte da tarefa vocês encontraram combinações de barras de cores iguais que fossem do mesmo tamanho das barras escolhidas pelo grupo. Agora, as combinações de barras também podem ser de cores diferentes. Mas observe que uma combinação de barra vermelha + verde clara é diferente de uma combinação verde clara + vermelha.

O grupo deve escolher uma barra e descobrir quantas combinações de barras é possível formar que sejam do mesmo tamanho da barra escolhida. Depois, escrevam o máximo de representações matemáticas de equivalências possíveis.

<i>Ações do aluno</i>	<i>Ações do professor</i>
Formam combinações de barras que não são do mesmo tamanho que a barra escolhida.	Pedir para que os alunos releiam o enunciado e notem que as combinações de barras precisam ser do mesmo tamanho que a barra escolhida.
Formam combinações de barras que são do mesmo tamanho que a barra escolhida, mas que são apenas da mesma cor.	Pedir para que os alunos releiam o enunciado e percebam que as combinações de barras também podem ser formados por uma única cor e por cores diferentes.



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



<i>Ações do aluno</i>	<i>Ações do professor</i>
Formam combinações de barras que são do mesmo tamanho que a barra escolhida, mas não formam todas as possibilidades de combinações de barras.	Incentivar os alunos a procurarem outras possibilidades, questionando se já tentaram outras alternativas e seu resultado. Exemplo: Vocês já tentaram com barras da cor vermelha? E da cor amarela? Qual foi o resultado? E juntar a barra de cor vermelha e amarela? E outras cores?
Formam combinações de barras que são do mesmo tamanho e formam todas as possibilidades de combinações de barras.	Questionar se seguiram alguma ordem para montar todas as possibilidades. Incentivá-los a registrar as representações matemáticas de equivalências.
Não compreendem como deve ser feitas as representações matemáticas de equivalências utilizando as letras da tarefa 2 item <i>a</i> .	Pedir para que olhem para as combinações de barras e digam o que estão vendo. Exemplo, uma barra marrom tem o mesmo tamanho de duas barras rosas. Questionar que letra utilizaram para a barra marrom e para a rosa. Agora tentem substituir a palavra barra marrom e rosa pela letra correspondente escolhida pelo grupo e a expressão “do mesmo tamanho” por um símbolo matemático.
Fazem as representações matemáticas de equivalências utilizando as letras da tarefa 2 item <i>a</i> , apenas para as combinações de barras de mesma cor.	Incentivá-los a formarem combinações para barras de cores diferentes como pede o enunciado da tarefa.
Fazem as representações matemáticas de equivalências utilizando as letras do item <i>a</i> para as combinações de barras de mesma cor e de cores diferentes.	Questionar se isso faz sentido e se facilita a compreensão e/ou comunicação.



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



<i>Ações do aluno</i>	<i>Ações do professor</i>
Escolhem a barra branca, vermelha ou verde claro.	Desafiá-los a escolher outra cor de barra (de medida maior) e formar todas as combinações de barras possíveis.

- d) Observem as combinações de barras formadas que são do mesmo tamanho que a barra escolhida pelo grupo. Representem por meio de frações e utilizando os símbolos $<$ e $>$ as comparações entre as barras de cada combinação.

<i>Ações do aluno</i>	<i>Ações do professor</i>
Não entendem o que é para fazer.	Pedir para que releiam o enunciado. Pedir para que observem as combinações de barras formadas a partir da barra escolhida. Questionar quais frações estão observando em cada combinação. Pedir para que registrem as frações observadas utilizando os símbolos $<$ e $>$.
Comparam frações de unidades de medidas diferentes.	Pedir para que releiam o enunciado. Lembrá-los que devem observar as combinações de barras de uma mesma unidade de medida, ou seja, da barra escolhida. Questionar quais frações irão comparar e como poderiam fazer a comparação.
Escolhem a barra branca, vermelha ou verde-clara.	Desafiá-los a escolher outra cor de barra de medida maior e formar todas as combinações de barras possíveis.
Confundem o símbolo $<$ e $>$.	Lembrá-los que $<$ significa menor que e $>$ maior que.
Utilizam o símbolo $<$ ou $>$ para frações iguais.	Pedir para que leiam o que escreveram. Questionar se essa representação é correta e qual símbolo matemático poderiam usar.



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



<i>Ações do aluno</i>	<i>Ações do professor</i>
Representam por meio de frações e utilizam os símbolos $<$ e $>$.	Verificar se fizeram para todas as combinações de barras. Questionar se isso faz sentido e se facilita a compreensão e/ou comunicação.
Comparam uma barra em relação a outra e observam qual é a maior.	Pedir para que representem e registrem detalhadamente e perguntar como fariam se tivessem apenas a representação fracionária.

(3) Discussão coletiva da tarefa

Essa é a etapa mais desafiante para o professor, porque ele precisa além de organizar as apresentações de forma a atingir o objetivo da tarefa em um processo de (re)construção das relações matemáticas, estabelecendo conexões entre as apresentações, visando o desenvolvimento do conhecimento e pensamento matemático dos alunos.

Visto que a Realização da tarefa e a Discussão coletiva da tarefa ocorrerão em dias diferentes, com intervalo de ao menos um dia entre elas, os grupos que apresentarão serão selecionados pela professora considerando suas resoluções levando em consideração estratégias diferenciadas que foram desenvolvidas pelos grupos, sejam elas corretas ou equivocadas, as representações que sejam ou não eficazes, além de erros possíveis de serem explorados, e favoreçam as discussões e contribuam para atingir o objetivo da tarefa. Os critérios utilizados na seleção serão elencados a partir das resoluções e elencados e sistematizados posteriormente no quadro a seguir.

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
Seguem uma ordem lógica para realizar todas as comparações de barras				
Não seguem uma ordem lógica para realizar todas as comparações de barras				
Representação eficaz				



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
 Financiamento:
 Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
 Tecnológico - CNPq

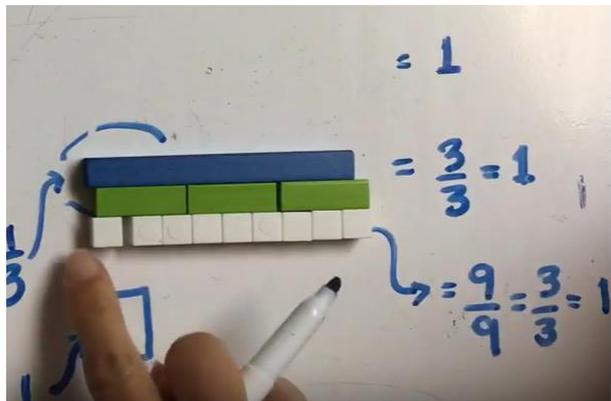


Representação não eficaz				
Erros a explorar				

(4) Sistematização das aprendizagens

Após finalizar a fase de Discussão coletiva da tarefa a professora iniciará a fase da Sistematização das aprendizagens tendo em mente as discussões e intervenções realizadas pela professora durante as fases anteriores.

A professora começará com as frações equivalentes comparando, por exemplo, a barra azul com as barras mas sem referenciar a unidade de medida como na tarefa anterior, para estabelecer algumas relações:



$$1 = \frac{3}{3} = \frac{9}{9}$$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$$

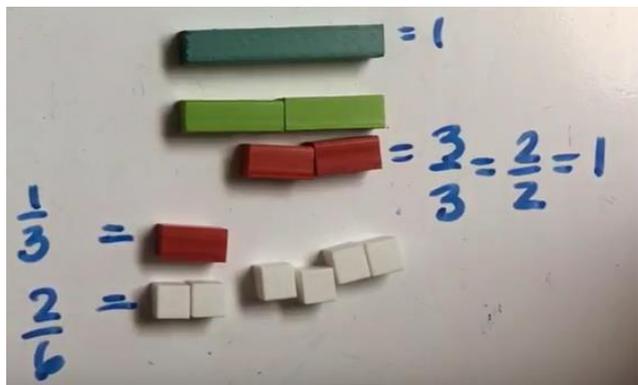
$$1 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{9}{9}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$

$$\frac{3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$$

Outro exemplo:



$$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{6}{6}$$

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$$

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$$

$$1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{6}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



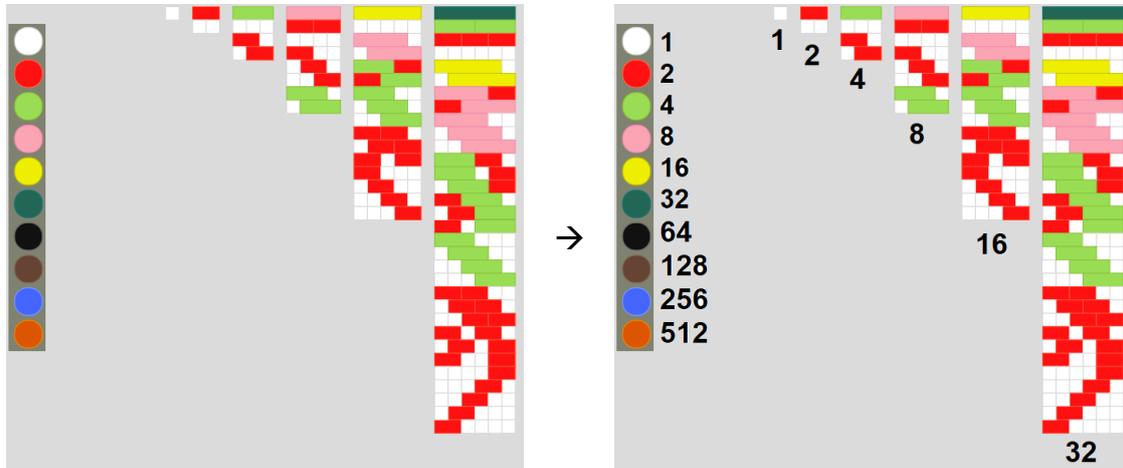
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

A ideia é que os alunos estabeleçam relação com as equivalências de frações e possam avançar no raciocínio de outras relações, como adição, subtração, multiplicação de um número inteiro por uma fração. Além disso, é importante definir frações irredutíveis.

Os alunos deverão registrar no caderno:

Uma fração é considerada irredutível quando o numerador e o denominador são números naturais e que não têm outros divisores comuns além de um, ou seja, são números primos entre si. No exemplo acima temos que $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, sendo $\frac{1}{3}$ a fração irredutível pois os números 1 (numerador) e 3 (denominador) só tem o um como divisor comum. Já no exemplo $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, temos as frações irredutíveis $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$.

Quanto ao item c, as possibilidades de formação de combinações de barras diferentes são:

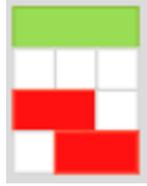


Os alunos farão o seguinte registro no caderno:

Observando a barra vermelha como unidade de medida encontra-se as seguintes equivalências:


$$1v = 2b \rightarrow 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \rightarrow 1 = \frac{2}{2}$$

Observando a barra verde-clara como unidade de medida encontra-se as seguintes equivalências:



$$1c = 3b \rightarrow 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \rightarrow 1 = 3 \cdot \frac{1}{3} \rightarrow 1 = \frac{3}{3}$$

$$1c = 1v + 1b \rightarrow 1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \rightarrow 1 = \frac{3}{3}$$

$$1c = 1b + 1v \rightarrow 1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \rightarrow 1 = \frac{3}{3}$$

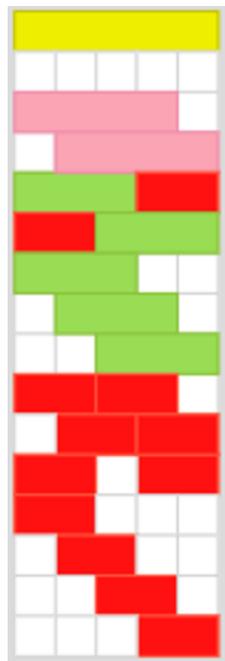
$$3b = 1v + 1b \rightarrow \frac{3}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \rightarrow 1 = \frac{3}{3}$$

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ ou } \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

É importante destacar que as equivalências não acontecem apenas entre as combinações de barras e a barra definida como a unidade de medida. Se a unidade de medida é a mesma, existem equivalências entre as combinações de barras também.

Observando a barra amarela encontra-se as seguintes equivalências:



$$1a = 5b \rightarrow 1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \rightarrow 1 = 5 \cdot \frac{1}{5} \rightarrow 1 = \frac{5}{5}$$

$$1a = 1r + 1b \rightarrow 1 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \rightarrow 1 = \frac{5}{5}$$

$$1a = 1b + 1r \rightarrow 1 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \rightarrow 1 = \frac{5}{5}$$

$$1a = 1c + 1v \rightarrow 1 = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \rightarrow 1 = \frac{5}{5}$$

$$1a = 1v + 1c \rightarrow 1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \rightarrow 1 = \frac{5}{5}$$

...

$$1b + 1r = 1v + 2b \rightarrow \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{1}{5} \rightarrow \frac{5}{5} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}$$

...

$$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Quanto ao item *d* da tarefa, a professora fará o quadro abaixo, observando que é possível realizar comparações de frações cuja unidade de medida são iguais.



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



<i>Representação com barras</i>	<i>Notação Fracionária</i>	<i>Leitura</i>	<i>Unidade de Medida</i>
	$\frac{1}{5} < \frac{4}{5}$ ou $\frac{4}{5} > \frac{1}{5}$	Um quinto é menor que quatro quintos. ou Quatro quintos é maior que um quinto.	Amarela
	$\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{3} < \frac{2}{3}$	Dois terços é maior que um terço. ou Um terço é menor que dois terços.	Verde-clara

Avaliação:

A avaliação ocorrerá durante todo o processo. Será observado o comprometimento, o engajamento, a interação e procedimentos individuais e coletivos durante as fases de desenvolvimento da aula. Os registros escritos das resoluções dos grupos serão enviados a professora, por meio da plataforma Google Sala de Aula e poderão ser alterados e/ou complementados após a Sistematização e novamente enviados para a professora por meio da mesma plataforma e, serão também considerados para a avaliação.