



TAREFA PROBABILIDADE CONDICIONADA 1: OS SACOS E AS BOLAS¹

A Tarefa 1, “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”, pretendia introduzir o tema da Probabilidade Condicionada, de uma forma intuitiva, utilizando materiais manipuláveis, através de uma experiência sobre extração de bolas.

Na primeira questão da tarefa, solicitava-se o cálculo de uma Probabilidade Condicionada, assumindo que os alunos ainda não tinham contacto formal com esta noção, requerendo que aplicassem os seus conhecimentos prévios acerca de Probabilidades e que utilizassem a sua intuição. A questão referia-se a uma experiência de extração de duas bolas numeradas sem reposição da primeira, pelo que, ao retirar a primeira bola do saco, o espaço de resultados alterava-se. Nesse sentido, a questão pretendia que os alunos explorassem a sua noção intuitiva de Probabilidade Condicionada através de uma extração sem reposição.

A este respeito, a figura seguinte apresenta a resolução de um grupo de alunos, que é representativa do que foi feito pela maioria dos restantes.

Depois de tirarmos 1 bola ímpar ficam: 4 ímpar e 5 par
 $P(\text{par}) = \frac{5}{9}$

Figura 3: Resolução de Cristiano, Filipe e Marco à questão a) da tarefa 1

Nesta resolução, podemos verificar que os alunos compreenderam que, ao extrair a primeira bola, o espaço de resultados alterou-se, sendo capazes de identificar o número de bolas com número ímpar e par. Após definirem o novo espaço de resultados, os alunos transformaram uma Probabilidade Condicionada numa probabilidade simples e calcularam a probabilidade pedida, usando o conceito clássico que já conheciam. Isto indica também que foram capazes de interpretar corretamente a experiência e a questão.

Um outro grupo de alunos utilizou, ainda que de forma incompleta, um Diagrama de Árvore para apoiar o cálculo da probabilidade pretendida, permitindo-lhe interpretar a experiência em causa. Tal como é possível verificar na figura 4, este par de alunos indicou em cada ramo do Diagrama de Árvore a probabilidade de cada acontecimento e, de seguida, concluiu a probabilidade pretendida.

¹DESIDÉRIO, A. F. S. **A aprendizagem, da Noção de Probabilidade condicionada. Um estudo com alunos do 2.º Ano do Ensino Profissional.** 2017. Universidade de Lisboa. Lisboa. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/33441>

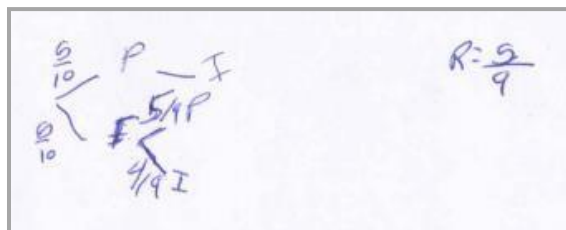


Figura 4: Resolução de Mário e César à questão a) da tarefa 1

As respostas mostram que, apesar de ainda não ter sido abordado em aula a noção de Probabilidade Condicionada, os alunos interpretaram corretamente a experiência descrita e, intuitivamente e recorrendo aos seus conhecimentos prévios de probabilidade, foram capazes de identificar que, com a extração de uma bola com um número ímpar, sem reposição, o espaço de resultados alterava-se, mas o número de bolas com número par mantinha-se. Assim, após definirem o novo espaço de resultados, alterado pelo fator condicionante, foi possível usarem o conceito de probabilidade clássica cuja definição e propriedades já conheciam.

Neste caso, os alunos mostraram reconhecer que a probabilidade dos acontecimentos se altera em situações de não reposição e conseguiram manter o controlo da composição total do espaço amostral de forma a julgar o relacionamento de dois acontecimentos nas situações sem reposição. Para além disso, todos os alunos atribuíram probabilidades numéricas em situações sem reposição, como verificamos nas figuras, o que permite concluir que usaram raciocínios numéricos para comparar a probabilidade de acontecimentos antes e depois da extração sem reposição e estabeleceram as condições necessárias ao abrigo das quais dois acontecimentos estão relacionados. Desta forma, verifica-se que a grande maioria dos alunos apresentou um nível 4 (numérico) na avaliação do seu pensamento em Probabilidade Condicionada.

Relativamente às concepções dos alunos de carácter cognitivo, estamos perante uma concepção causal da Probabilidade Condicionada. Esta concepção manifesta-se pela introdução de uma relação de causa-efeito entre o acontecimento condicionante, ou seja, tirar a primeira bola com número ímpar, e o acontecimento condicionado, a segunda bola a ser retirada ser par. A interpretação que os alunos fazem, de forma correta, é que a primeira bola extraída é uma das causas para o efeito da segunda.

No entanto, um dos grupos de alunos confundiu a Probabilidade Condicionada com a probabilidade da interseção de acontecimentos, cometendo um erro bastante comum, que consiste no cálculo de uma probabilidade conjunta quando é pedida uma Probabilidade Condicionada. Neste caso, podemos verificar que Francisca, Vasco e Bruno utilizaram o produto de duas probabilidades que significa, tal como referem na sua resposta da figura 5, “a probabilidade (...) de a segunda bola ser par e a primeira ser ímpar”. Isto mostra que interpretaram incorretamente ‘sabendo que’ como sendo ‘e’, pelo que não identificaram o

acontecimento condicionado e o acontecimento condicionante na experiência, como se observa na sua resolução na figura 5. Ainda assim, este grupo de alunos evidenciou compreender a experiência, pois calcularam as probabilidades de ocorrência de cada acontecimento e relacionaram-nas com os respectivos ramos do Diagrama de Árvore de forma correta. Porém, não conseguiram interpretar a probabilidade pedida e não identificaram os valores que apresentaram nesse Diagrama como sendo uma Probabilidade Condicionada e, conseqüentemente, não conseguiram obter uma resposta correta. Assim, ao conjugar duas das probabilidades dos ramos, obtiveram uma probabilidade conjunta e, na resposta, fizeram uma correta interpretação do valor que calcularam.

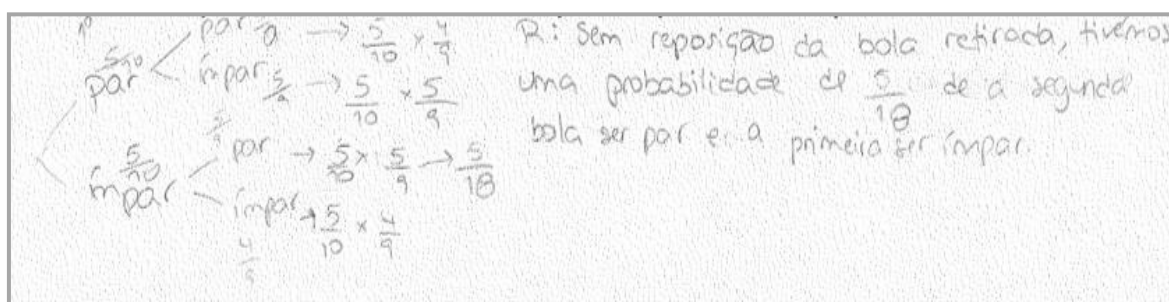


Figura 5: Resolução de Francisca, Vasco e Bruno à questão a) da tarefa 1

A questão b) da tarefa foi pensada de forma a levar os alunos a confirmarem os resultados obtidos na questão anterior. Neste sentido, cada grupo de alunos extraiu uma bola do saco com número ímpar e, de seguida, retirou aleatoriamente uma bola e registou o seu número, até repetir a experiência 20 vezes. Apesar de as 20 repetições serem insuficientes para se poder concluir sobre a probabilidade de a segunda bola extraída ter número par - sendo que a primeira bola extraída tinha número ímpar - o trabalho conjunto com as 20 repetições dos 5 grupos permitiu ter 100 repetições da experiência, pelo que já foi possível verificar se o valor da probabilidade obtida, empiricamente, estava próximo do seu valor esperado, pela definição frequencista de Probabilidade.

No entanto, ao realizarem apenas 20 repetições da experiência, 2 grupos concluíram que a probabilidade de sair bola com número par era superior à probabilidade de sair bola com número ímpar, tal como haviam esperado e como o César tinha referido, no momento de discussão dos resultados, com o seu colega Mário: “é mais provável sair bola com número par, porque já se tirou uma com número ímpar”. Como podemos constatar na figura 6, este grupo de alunos apresentou as probabilidades calculadas em fração simplificada e fez uma leitura da mesma: “Há probabilidade de 7 em 10 tiragens de sair par”. No entanto, os alunos apresentaram algumas dificuldades de notação, pois escreveram a fração sem identificar que se referia a uma probabilidade e a um dado acontecimento.

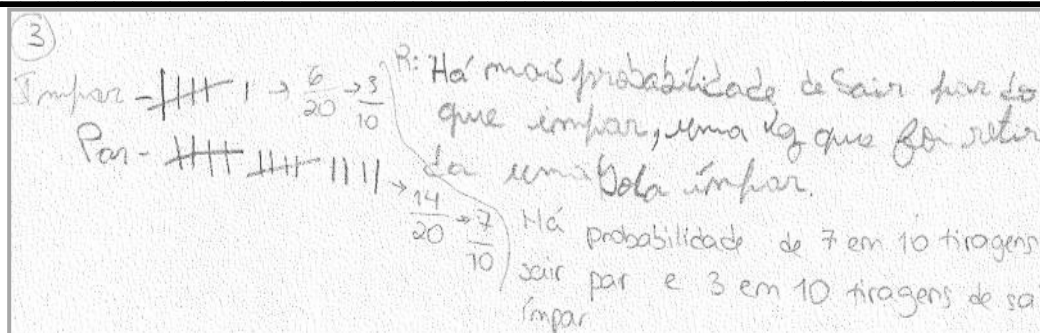


Figura 6: Resolução de Francisca, Vasco e Bruno à questão b) da tarefa 1

Apenas um grupo de alunos obteve a probabilidade de sair bola com número ímpar superior à probabilidade de sair bola com número par, no conjunto das 20 repetições da experiência. No entanto, não tiraram conclusões sobre os resultados obtidos e apenas calcularam corretamente a probabilidade de obter uma bola com número par, como mostra a figura 7.

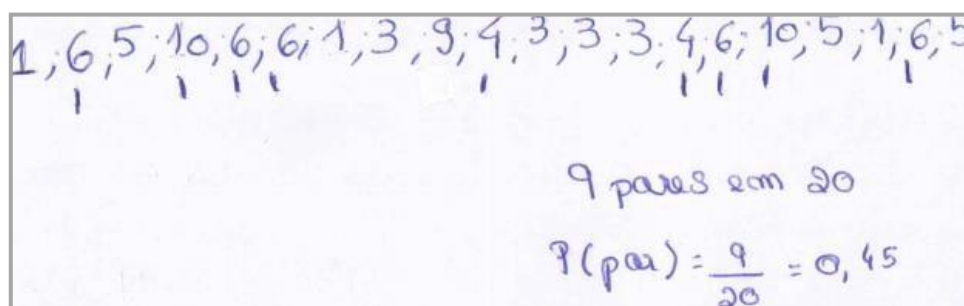


Figura 7: Resolução de Francisco, Frederico e Rita à questão b) da tarefa 1

Pretendia-se que os alunos concluíssem que os valores estavam bastante próximos e que, através da definição frequencista de probabilidade, caso realizassem a experiência um maior número de vezes, o valor obtido fosse tender para o valor teórico dessa probabilidade, calculado na questão anterior. No entanto, Francisco, Frederico e Rita não demonstraram espírito crítico para comentar os valores obtidos.

Os restantes dois grupos obtiveram valores iguais de probabilidade de sair bola com número par e bola com número ímpar, como podemos verificar nas figuras 8 e 9. Na resolução da figura 8, os alunos referem que “havia mais probabilidade de calhar par mas como é um jogo aleatório calhou à sorte”, o que evidencia que os alunos interpretaram corretamente o significado de experiência aleatória e a noção de Probabilidade Condicionada. Deste modo, reconheceram que a probabilidade de sair bola com número par é mais elevada, pois existem mais bolas com número par do que com número ímpar no saco, e atribuíram o resultado díspar que obtiveram em relação à questão anterior ao número

limitado de repetições da experiência.

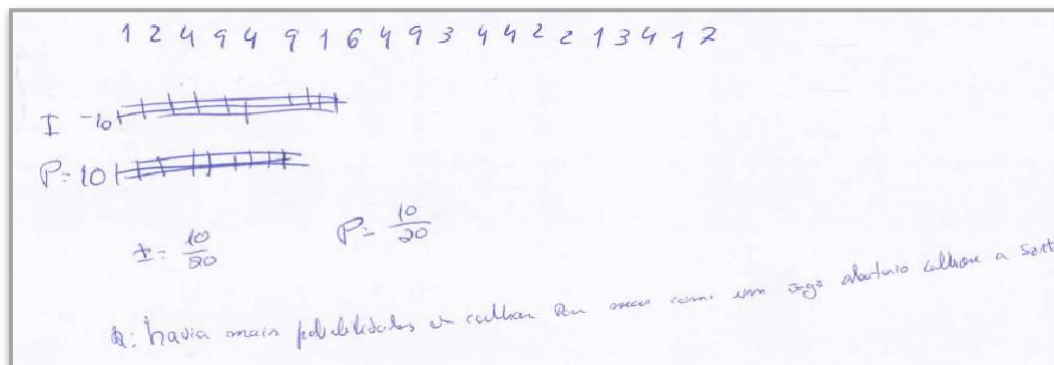


Figura 8: Resolução de César e Mário à questão b) da tarefa 1

Por sua vez, na figura 9, apesar dos alunos referirem que os resultados obtidos não estavam de acordo com os seus raciocínios na questão anterior, e contrariando suas intuições, não foi possível verificar se estavam conscientes da razão destes resultados.

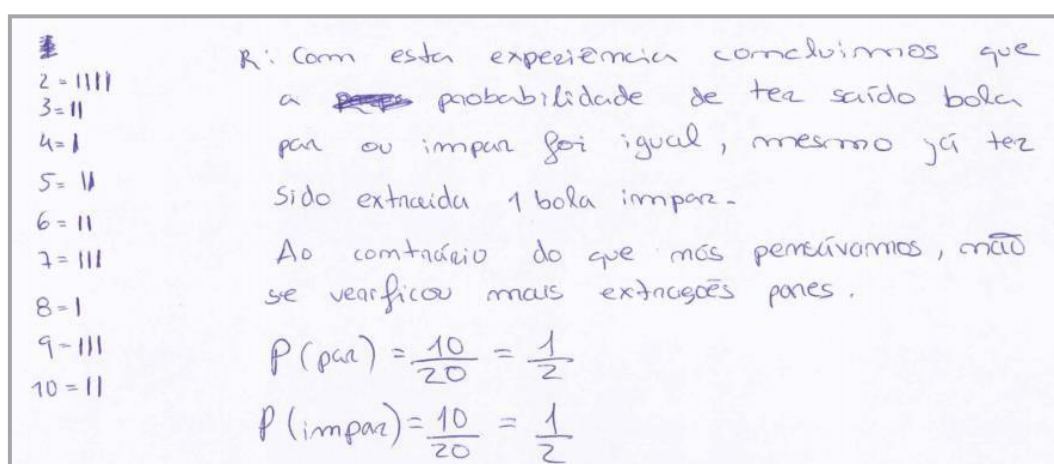


Figura 9: Resolução de Cristiano, Filipe e Marco à questão b) da tarefa 1

Assim, a generalidade dos grupos, à exceção do da figura 8, não tem em conta a definição frequencista de Probabilidade, pois aqueles que não obtiveram uma probabilidade de sair bola com número par superior à probabilidade de sair bola com número ímpar não referiram que os resultados obtidos poderiam não ser conclusivos, atendendo ao número limitado (apenas 20) de repetições da experiência. Dessa forma, não tiraram conclusões significativas dos valores obtidos na segunda questão, relativamente ao valor calculado na primeira. No entanto, durante a discussão da tarefa, e à medida que se aumentava o número de repetições realizadas, reunindo os resultados dos 5 grupos no Excel, os alunos concluíram que, tal como Francisca explicou a Vasco, no momento de resolução da tarefa, "quanto mais extrações fizemos, mais o valor da probabilidade aumenta, para o valor suposto".



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Em síntese, os alunos mostraram compreender que numa experiência de extração de bolas, sem reposição, o acontecimento condicionante (extração que ocorre antes) influencia o acontecimento condicionado e atribuíram um significado intuitivo à noção de Probabilidade Condicionada, mesmo sem ter sido abordada essa noção em aula. No que se refere à concepção sobre Probabilidade Condicionada a maioria dos alunos apresentou ter uma concepção causal, interpretando-a como uma relação de causa-efeito entre o acontecimento condicionante e o acontecimento condicionado, respectivamente. Apesar de ser uma tarefa inicial, onde os alunos ainda não tinham tido contacto com a noção formal de Probabilidade Condicionada, estes apresentaram nível 4 (numérico) na avaliação do pensamento referente a esta noção, dado que utilizaram raciocínios numéricos para resolver questões que envolviam o conceito de Probabilidade Condicionada. Ainda assim, alguns dos alunos apresentaram dificuldades na interpretação de uma Probabilidade Condicionada, pois confundiram-na com uma probabilidade conjunta. A generalidade dos alunos também apresentou dificuldades em justificar e criticar os resultados obtidos.