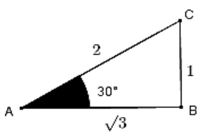
Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq

TAREFA TRIGONOMETRIA[1]

Relações entre razões trigonométricas do mesmo ângulo

Estabelecer relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo.
Com o objetivo de os alunos estabelecerem as relações entre as razões trigonométricas de um ângulo agudo, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ e $sen2\alpha + cos2\alpha = 1$, aplicando-as na resolução de problemas (Anexo 4), foi-lhes proposto a realização de uma tarefa exploratória com e sem recurso ao GeoGebra.

A Maria e o João ao estudarem trigonometria constatram que existem relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo. A Maria considerou que a $\tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$. O João não concordou dizendo que a $\tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$. Na dúvida, os dois alunos procuraram averiguar que relações podem estabelecer entre as razões trigonométricas.



1. Determina as razões trigonométricas do ângulo de 30º do seguintetriângulo retângulo:

   sen (30º)? ______________ cos (30º)? ______________

   tg (30º)? ______________

2. Tendo como base a construção do triângulo [ABC] em GeoGebra. Completa a seguinte tabela:

α	sen α	cosα	tgα	$\frac{sen\alpha}{cos\alpha}$	$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$
28°					
29°					
30°					
31°					

3. Partindo das razões trigonométricas estudadas, provar as relações:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \qquad \tan \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$$

4. Mostre que $1 + 2senx\cos x = (senx + \cos x)^2$

[1] MENDES, M. M. N. F. de. **Aprendizagem de trigonometria de alunos do 9.° ano de escolaridade com recurso ao GeoGebra.** 2016. Universidade do Minho – Instituto de Educação, Braga. Disponível em: https://hdl.handle.net/1822/43929

Na expectativa da tarefa ser realizada por um maior número possível de alunos, registei no quadro o que se pretendia com a tarefa começando por relembrar conceitos já abordados em aulas anteriores. Com os alunos dispostos em pares, a exploração da tarefa abarcou quatro alíneas das quais a primeira alínea foi resolvida sem o uso do GeoGebra. Os alunos determinaram as razões trigonométricas do ângulo com amplitude de 30º do triângulo retângulo [ABC]. A maior parte dos alunos determinou sem dificuldade as razões propostas. Na determinação dessas razões, alguns alunos tiveram necessidade de efetuar algumas notações relativamente ao nome dos lados que compõem o triângulo, como mostra a Figura 8:

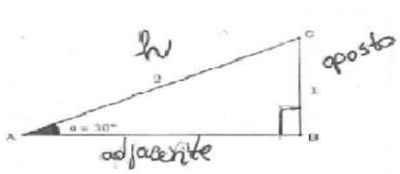


Figura 8. Esboço do triângulo retângulo [ABC] efetuado por um aluno.

Na determinação das razões trigonométricas de alguns ângulos agudos, os alunos recorreram ao GeoGebra, o que lhes permitiu, através da figura geométrica (Figura 9) já construída, gerar e recolher valores de forma a responder à alínea proposta.

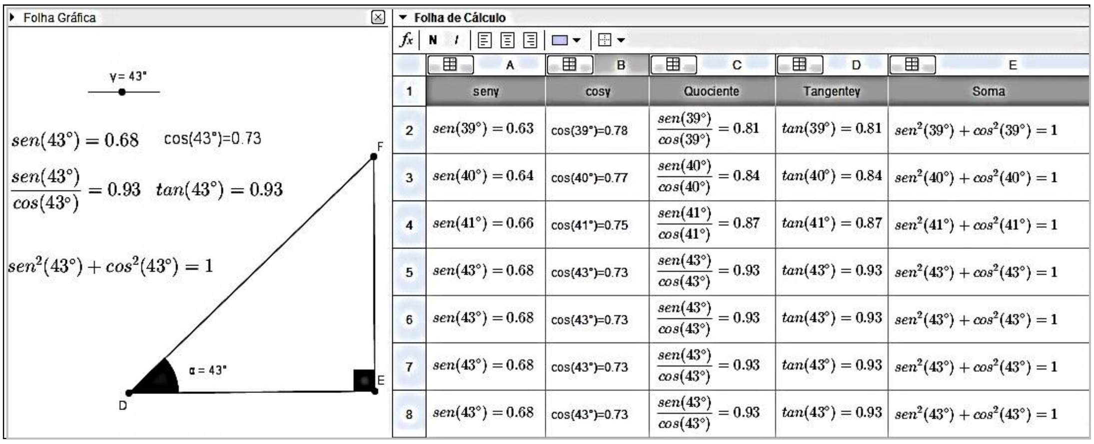


Figura 9: Estabelecer relações entre os valores das razões trigonométricas do mesmo ângulo.

A ‘recolha’ desses valores verificou-se através da manipulação do seletor (v). Obtidos esses valores, automaticamente eram registados numa folha de cálculo. Os alunos puderam assim comparar os valores e preencher a tabela, o que foi efetuado pela maior parte dos alunos. Contudo, alguns alunos não conseguiram obter o valor do ângulo α, tentando deslizar o seletor repetidamente.

Aluno: Professora não estou a conseguir obter o valor do ângulo 29º!

Professora: Vocês têm de deslizar o ponto sobre o segmento devagar e visualizar os valores gerados no ficheiro, provavelmente o valor do ângulo que pretendem já está gerado.

Aluno: Ah! Já vi professora.

Para verificar se os alunos estavam a perceber o preenchimento da tabela circulava pela sala observando as suas resoluções e tirando dúvidas. A determinação dos valores só foi possível pelo facto de os alunos terem oportunidade de manipular a figura já construída no GeoGebra. Subjacente a esta prática, Lopes (2011) considera que o "GeoGebra possibilita pensar de uma forma matematicamente diferente do que se estivesse a trabalhar com uma construção estática ou apenas falando dela, sem nenhum recurso visual" (p. 10). A exploração desta parte da tarefa foi importante para os alunos perceberem que, independentemente de alterarem o comprimento dos lados do triângulo, a amplitude do ângulo e a respetiva razão trigonométrica não se alteravam.

Professora: O que concluíram da tabela que acabaram de preencher?
Aluno P6: Eu verifiquei que sempre que "pucho" um dos lados do triângulo o valor do senα, cosα e tgα não mudam.
Professora: Pois não, isto quer dizer que as razões trigonométricas não dependem do comprimento dos lados do triângulo [ABC], mas apenas da amplitude dos seus ângulos. Todos concordam?
Aluno P6: Sim.
Professora: Em relação ao João e à Maria, já descobriram qual é a relação que está correta?
Aluno: Não!

De acordo com o teor das respostas dos alunos, apercebi-me que ainda não tinham chegado ao objetivo da tarefa, embora tenham percebido que a amplitude do ângulo não depende do comprimento dos lados do triângulo. Como tal, os alunos prosseguiram a exploraçãoda alínea 3, com a qual se pretendia que validassem as igualdades sen2 cos2 1 e $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$. Ao mesmo tempo, aspirava que os alunos descobrissem a relação inicialmente pedida na tarefa proposta.

A prova da relação sen2 cos2   1 foi concretizada através da aplicação do Teorema de Pitágoras (c2= a2+b2) e das razões trigonométricas $\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}$ e $\cos\alpha = \frac{b}{c}$. Os alunos indiciaram perceber que as razões seno e cosseno de um ângulo agudo são obtidas a partir dos elementos de um triângulo retângulo, logo as medidas dos seus lados verificam o teorema de Pitágoras.

Na prova de $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, os pares que conseguiram estabelecer esta relação, de uma forma geral, apresentaram respostas semelhantes, como exemplificam as resoluções do par P1 e P2. O par P1, precisou de fazer um esboço geométrico para obter as provas (Figura

10).

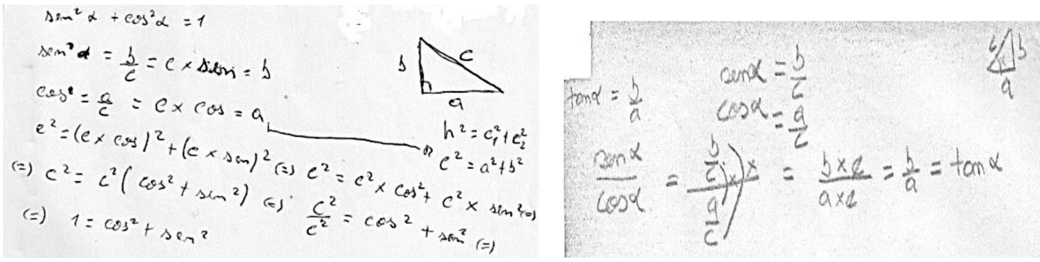


Figura 10: Prova das relações sen² α +cos² α = 1 e $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ do par P2.

Já o par P2, não evidenciou o esboço geométrico para provar as mesmas relações (Figura 11).

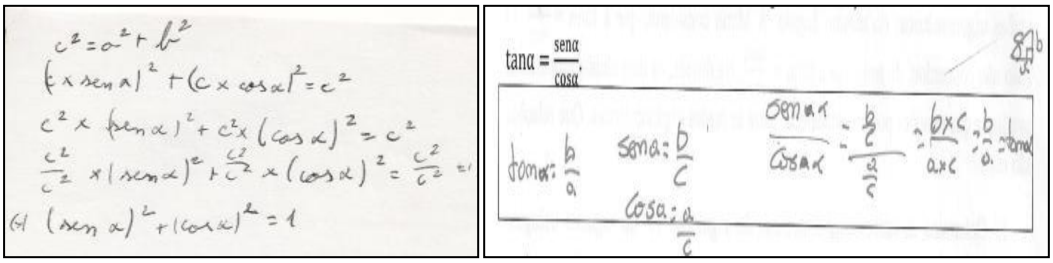


Figura 11: Prova das relações sen² α +cos² α = 1 e $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ do par P1.

Após o tempo estipulado para a prova das relações trigonométricas propostas, um elemento do par P1 apresentou no quadro o que tinha feito no seu lugar:

Professora: Estão de acordo com a resolução de sen2 α +cos2 α = 1 e $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$?

Aluno: Sim, na sen2 α +cos2 α = 1 a partir das razões trigonométricas e aplicando o Teorema de Pitágoras chegamos ao mesmo resultado. Na prova da e $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ aplicamos as razões trigonométricas.

Professora: Ouviram o vosso colega? Aluno P2: Sim.

Professora: Então já sabem responder à questão inicialmente proposta na Tarefa 1? Quem tem razão? Qual foi a relação estabelecida?

Aluno P2: Quem tem razão é o João, porque esta relação $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ foi provada de acordo com as definições das razões trigonométricas em relação ao triângulo retângulo.

Professora: Têm todos com a mesma opinião?

Aluno P15: Professora, afinal quem tem razão?

Professora: Tendo como base a resolução do quadro, procedi novamente à explicação da relação estabelecida, confirmando que o João estava correto na sua afirmação.

De acordo com as respostas dadas, os alunos intervenientes conseguiram determinar a relação inicialmente estabelecida na Tarefa 1. Os pares P1, P2, P3, P7, P11, com base na prova de sen$^2\,\alpha$ + cos$^2\,\alpha$ = 1 e de $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, concluíram que o João estava correto na sua afirmação. Ao circular pelos lugares, verifiquei que alguns alunos afirmaram que quem tinha razão era o João. Outros alunos, embora não tenham conseguido provar que de sen$^2\,\alpha$ + cos$^2\,\alpha$ = 1, conseguiram provar que $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, como ilustram as respostas dos pares P4 e P5.

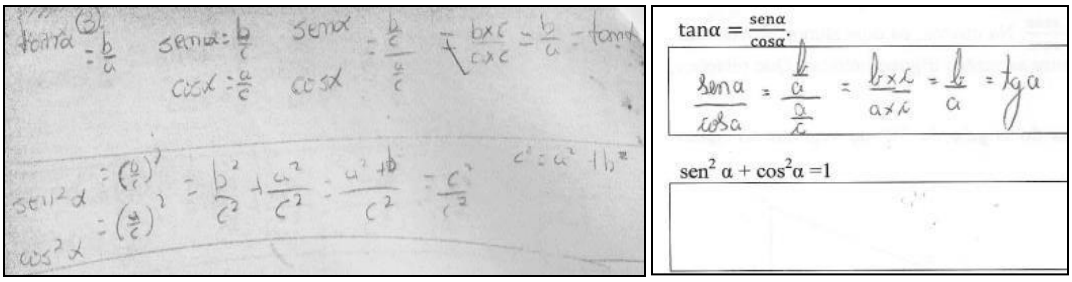


Figura 12: Resolução das provas $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$, do par P4 e P5.

Na atividade da prova das relações propostas, conclui-se que 14 alunos não aplicaram o Teorema de Pitágoras na verificação da lei fundamental da trigonometria.

Após a reflexão com a turma sobre as relações estabelecidas, propus aos alunos que provassem a igualdade 1+ 2senx cos x = (senx + cos x)^2. Na realização desta atividade, a maior parte dos alunos manifestou dificuldades, o que indiciam que se deveram ao facto de não estarem habituados a provar resultados matemáticos. Apenas dois pares de alunos realizaram esta prova, salientando que estes eram alunos com um bom desempenho à disciplina de Matemática. Na sua resolução, estes alunos consideraram o segundo membro da igualdade e aplicaram o quadrado do binómio para obter a expressão do primeiro membro, como se pode visualizar (Figura 13) nas respostas do par P1 e P11.

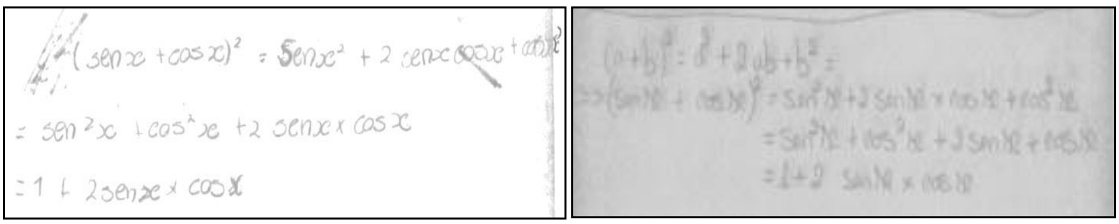


Figura 13: Prova da relação 1+ 2senx cos x = (senx + cos x)^2 dos pares P1 e P11.

O par P11 realizou a prova atribuindo, respetivamente, ao seno e ao cosseno as incógnitas a e b, chegando à expressão do primeiro membro.

Já o par P3 começou por escrever e desenvolver o quadrado do binómio não concluindo a sua resolução, como mostra a (Figura 14):

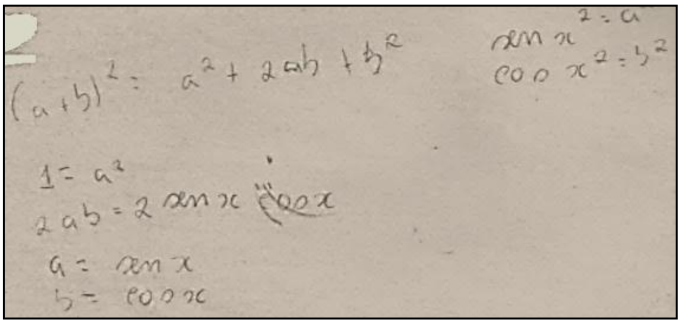


Figura 14: Resolução da prova 1+ 2senx cos x = (senx + cos x)^2 2 do par P3

Da análise das produções realizadas pelos alunos, identificaram-se os seguintesprocedimentos:

Tabela 9: Procedimento dos alunos, referente às provas

	$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$	$\tan\alpha = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha}$	$1 + 2senx\cos x = (senx + \cos x)^2$	
O aluno desenvolveu, partindo do T.P. e aplicando as razões trigonométricas.	P1, P2, P3, P7, P11;	P1, P2, P3, P7, P11;	Nenhum aluno resolveu a prova pegando no 1.º membro.	
O aluno aplicou no 2.º membro o quadrado de um binómio.				P1, P11;
O aluno começou mas não terminou	P4, P5, P6; P8, P9, P10, P12;	P4, P5, P6, P8; P10, P12;		P2, P3, P4, P5;
O aluno não resolveu	P13, P14, P15;	P9, P13, P14, P15;		P6, P7, P8, P9, P10, P12, P13, P14, P15;

Mediante as dificuldades sentidas pelos alunos nas provas propostas, verificou-se que 10 alunos (33,3%) conseguiram efetuar as provas das relações propostas, enquanto 14 (46,7%) iniciaram a 1.ª prova mas não a concluíram, o que aconteceu com 12 alunos (40%) na 2.ª prova. Não efetuaram qualquer resolução na 1.ª prova 6 alunos (20%) e 8 alunos na 2.ª prova (26,7%). Relativamente à prova da igualdade 1+ 2senx cos x = (senx + cos x)^2 , cerca de 13,3% chegaram ao pretendido, 26,7% começaram a prova mas não a concluíram e 60% não conseguiram efetuar a prova.

Depois de identificar o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo, como razões trigonométricas a partir de elementos de um triângulo retângulo, foi estabelecida a razão trigonométrica $\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ assim como a sua respetiva prova. Nesta fase, os alunos individualmente tiveram oportunidade de aplicar a relação estabelecida através de aplicações práticas.

Aplicação das relações entre razões trigonométricas do mesmo ângulo. As atividades práticas (Anexo 3), retiradas do manual escolar com o objetivo de aplicar e consolidar os conhecimentos matemáticos anteriormente adquiridos, reforçaram a aprendizagem dos conteúdos lecionados. Na primeira atividade não se verificaram dificuldades de aplicação dos conhecimentos, no entanto foi evidente a falta de hábito em fundamentar as respostas. Enquanto quatro alunos tiveram esse cuidado, como exemplifica a resolução do par P1, 19 alunos simplesmente substituíram os valores das razões trigonométricas propostas mas não simplificaram a fração, como ilustra a resposta do par P6.

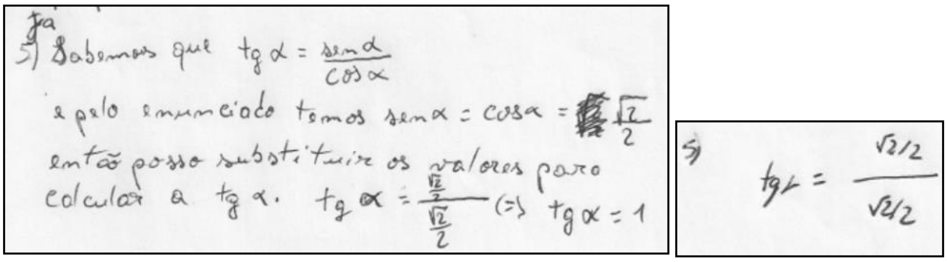


Figura 15: Resolução do aluno do par P1 e resolução do aluno do par P6.

A segunda atividade, com o objetivo de calcular $2sen\theta - tg\theta$, 4 alunos conseguiram calcular o valor exato, como exemplifica a resolução do par P2, 11 alunos só substituíram o valor da tgθ, o que lhes impossibilitou calcular o valor exato da expressão, e 15 alunos não conseguiram calcular o valor exato da expressão, como mostra a resolução do par P13 (Figura 16).

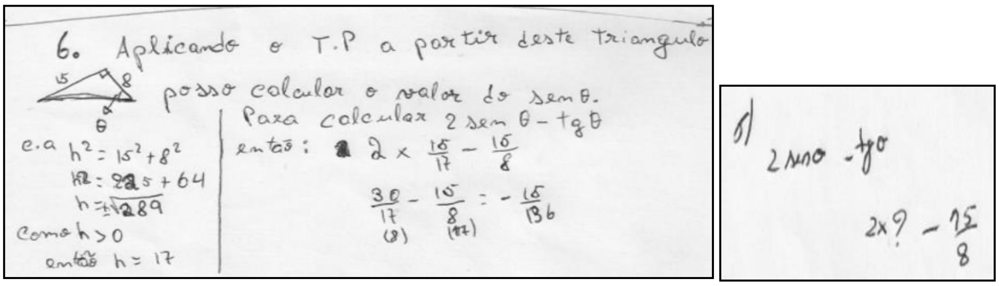


Figura 16: Resolução dos alunos do par P2 e P13.

Verifica-se que o par P2 teve o cuidado de estabelecer a relação entre os lados do triângulo e o teorema de Pitágoras, conseguindo dessa forma obter o valor da hipotenusa (incógnita desconhecida), enquanto o par P13 não conseguiu descobrir o valor da incógnita desconhecida, não concluindo o valor pretendido.