Tarefa 1 – Princípio Fundamental da Contagem

Conteúdos: Princípio Fundamental da Contagem e operador fatorial

Fonte: ROSSA, E. P. de O. **Plano de aula do estágio de regência:** análise combinatória, princípio fundamental da contagem, fatorial, permutações simples e com repetições, combinações e arranjos. Universidade Estadual do Paraná – Campus União da Vitória. 2018.

TAREFA 1 - PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Situação 1: Maria estava passando em frente à uma loja e avistou uma grande promoção de roupas e calçados. Ela entrou na loja para conferir os produtos e gostou de 3 camisas, 3 calças e 2 pares de sapato. De quantas formas diferentes ela pode combinar as roupas e sapatos ao prová-las?

Situação 2: Uma pessoa deseja visitar um amigo que mora no sexto andar de um prédio. Sabendo que esta pessoa não gosta de subir escadas e que o prédio possui quatro elevadores, determine:

a) De quantas maneiras diferentes é possível esta pessoa entrar e sair do prédio utilizando os elevadores?
b) De quantas formas é possível entrar e sair do prédio, de maneira que o elevador utilizado para sair seja diferente do usado para entrar?
c) Se o indivíduo precisar ir uma segunda vez ao prédio, de quantas formas diferentes ele pode entrar e sair sem repetir, em nenhuma das vezes, um mesmo elevador?

PLANO DE AULA

Duração:

- 2h/aula

Conteúdos:

- Princípio Fundamental da Contagem;
- Fatorial.

Ano de escolaridade:

- 2° ano do Ensino Médio

Objetivo geral:

- Reconhecer, diferenciar e conceituar situações de análise combinatória.

Objetivos específicos:

- Compreender o Princípio Fundamental da Contagem;
- Compreender o operador Fatorial.

Recursos:

Para a realização das aulas previstas neste plano, serão necessários os seguintes recursos: folhas com tarefa(s) impressa(s); lousa e giz; caneta, lápis, borracha e caderno para a resolução das tarefas; câmera fotográfica, para registrar as resoluções para discussão coletiva; projetor e tela, para a discussão coletiva e a sistematização das aprendizagens.

Metodologia

A dinâmica adotada para as aulas previstas neste plano será pautada no Ensino Exploratório de Matemática (EEM).

O EEM pode ser entendido como uma perspectiva que se situa em uma compreensão de *inquiry-based teaching* (PAULEK; ESTEVAM, 2017). Esta perspectiva se difere do ensino tradicional devido aos papéis que são desempenhados pelo professor e pelos alunos, às tarefas que são propostas e à dinâmica da aula (OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013).

> Ela coloca os alunos no centro do processo didático, no qual, a partir de tarefas desafiadoras e com ações consonantes do professor, estes são conduzidos a comunicar suas ideias e (in)compreensões, questionar ideias de outros, refletir sobre a necessidade ou vantagem de determinadas ideias ou estratégias de resolução, em uma dimensão colaborativa de aprendizagem (PAULEK; ESTEVAM, 2017, p. 412).

As aulas baseadas no EEM, levando em conta os papéis que professor e alunos devem desempenhar, geralmente são estruturadas em quatro fases distintas, porém interligadas. É importante ter em mente que aspectos considerados negativos na realização de uma das fases podem implicar em situações que dificultam ou comprometam as fases posteriores.

As fases são as seguintes:

i) *Introdução ou proposição da tarefa:* corresponde ao ato de o professor propor a tarefa aos alunos. Nesta fase, o professor necessita garantir a adesão dos alunos à tarefa e que se sintam desafiados a realizar o que lhes é proposto (OLIVEIRA, MENEZES; CANAVARRO, 2013). Para garantir a adesão, o professor necessita ouvir os alunos com atenção, percebendo suas dúvidas ou dificuldades e buscar esclarecê-las para que possam compreender a proposta realizada. Além disto, o professor deve fornecer as orientações necessárias para a exploração da tarefa e disponibilizar de ambiente e materiais necessários para a realização das fases seguintes da aula (OLIVEIRA; CARVALHO, 2013).

ii) *Desenvolvimento ou exploração da tarefa*: nesta fase, o foco está no trabalho dos alunos, podendo ser realizada em grupos ou individualmente. O papel do professor envolve garantir que todos participem de forma produtiva no desenvolvimento da tarefa, bem como auxiliar os alunos, contribuindo para a construção ou aprimoramento das conjecturas apresentadas. Para Canavarro (2011), o professor deve dedicar-se a observar e ouvir os alunos, avaliar a validade matemática de suas ideias e interpretá-las, por mais que estas sejam estranhas ou diferentes das ideias antecipadas no planejamento.

Em relação aos alunos, estes devem, com seus colegas, explorar a tarefa, lendo as situações propostas e elaborando estratégias que permitam chegar em uma solução/resposta, com base nos conhecimentos que possuem, buscando justificar suas ideias. A elaboração destas estratégias deve partir dos alunos, sendo resultado de conjecturas de forma espontânea (individual), da interação com os colegas e/ou dos questionamentos do professor por meio das interações.

Durante as interações, o professor deve ouvir e interpretar as ideias apresentadas pelos alunos, sendo seu propósito avaliar os argumentos e justificativas apresentadas. Ainda nesta fase, deve-se orientar os alunos para que registrem suas ideias para uma possível apresentação aos colegas na fase seguinte.

Para a próxima fase, o professor, a partir da observação dos grupos, deve selecionar as ideias que julgar possuir maior relevância de acordo com seus objetivos, porém que permitam uma discussão rica do ponto de vista matemático, já levando em conta aspectos que podem ser abordados na sistematização. Os grupos de alunos devem ser escolhidos com base em critérios pré-estabelecidos pelo professor, não devendo limitar as apresentações a grupos que se voluntariam (CANAVARRO, 2011).

iii) *Apresentação e discussão das resoluções:* aqui os grupos de alunos selecionados na fase anterior apresentam suas ideias e resoluções aos colegas, justificando as estratégias utilizadas a fim de, juntamente com o professor, comparar diferentes resoluções, suas potencialidades e limitações (ESTEVAM, CYRINO; OLIVEIRA, 2017) e contribuir para novas aprendizagens relevantes, como conceitos, procedimentos e sobre modos de produção do conhecimento matemático (BOAVIDA, 2005 *apud* CANAVARRO; MENEZES; OLIVEIRA, 2014). Em relação ao papel do professor, este deve gerenciar a discussão, organizando e executando ações (como questionamentos, complementações, etc.) que permitam evidenciar os resultados obtidos pelos alunos e os respectivos argumentos que podem apresentar sobre suas estratégias.

iv) *Sistematização das aprendizagens:* já na fase final, a atenção deve estar voltada no professor, que necessita realizar uma aproximação ou relacionar as resoluções e estratégias apresentadas pelos alunos com os conhecimentos matemáticos sistematizados e objetivos da aula. Para isto, o professor convida os alunos a analisar, comparar e confrontar as resoluções apresentadas, buscando perceber aspectos positivos e negativos das resoluções, graus de formalidade e potencialidades.

v) *Antecipação:* embora não constitua uma fase da aula, esta prática é apontada como essencial ao EEM porque consiste em "prever" situações que podem ocorrer em sala numa aula, devendo ser realizada anteriormente à aula. Se o professor realizar uma antecipação consistente, poderá ampliar seus argumentos quanto às orientações com os alunos, preparar-se para gerir possíveis discussões na discussão coletiva e elaborar elementos consistentes para a sistematização mínima, ou seja, estar suficientemente preparado para sistematizar aquelas ideias e estratégias que espera que seus alunos utilizem.

Informações

Serão apresentadas algumas considerações quanto à forma como será a proposta aos alunos e também algumas informações importantes que o professor deve levar em conta antes do início da tarefa. Em seguida, nas subseções presente em cada tarefa e intitulada *"Tarefa apresentada aos alunos"*, é apresentada a tarefa que será entregue aos alunos com cada uma das questões que a compõe. Os comentários em itálico, nessas subseções, são destinados ao professor e referem-se ao que deve ser esperado de cada questão e algumas orientações para que o professor possa auxiliar os alunos. Por fim, é descrito como a tarefa será sistematizada.

Em relação às resoluções das tarefas propostas, Fernandes e Correia (2007) são citadas por Almeida (2010) quando referem quatro estratégias de resolução de situações de análise combinatória, sendo elas: enumeração, diagrama de árvore ou diagrama das possibilidades, operações numéricas e, por último, fórmulas. A estratégia de enumeração envolve listar todas ou algumas possibilidades; o diagrama de árvore consiste na elaboração de um esquema que permite contar as possibilidades para os agrupamentos; as operações significam calcular as possibilidades a partir de uma significação sobre a ação realizada; e as fórmulas referem o uso de um algoritmo que não necessariamente possui significado para o aluno, mas que possibilita a obtenção de resultados. Esta última estratégia será menos provável de ocorrer, porque acredita-se que os alunos não tiveram contato formal com estes conteúdos no percurso escolar e isso dificultará o emprego direto de fórmulas/algoritmos. Sobre o grau de complexidade das estratégias que orientarão a seleção de resoluções para a discussão coletiva, será considerado, em ordem crescente, as estratégias de enumeração, diagrama de árvore, operações e fórmulas (contanto que para esta última os alunos apresentem uma boa justificativa), pois os dois primeiros casos necessitam que os alunos realizem ligações, tendo em conta que não esqueceram de nenhum elemento, enquanto as últimas requerem maior reflexão sobre os significados das ações realizadas. Assim, serão consideradas as quatro estratégias como possíveis situações a emergir na resolução da tarefa 1.

Na discussão e sistematização da tarefa, pretende-se explicitar estas diferentes estratégias (principalmente o diagrama de árvore e as operações), com a intenção de fornecer modelos aos alunos que possibilitem dar significado aos conteúdos e refletir sobre aspectos que fundamentam, justificam e significam as fórmulas relacionadas à análise combinatória. Para isto, serão fotografadas e projetadas para toda a turma as resoluções dos grupos selecionados.

As situações presentes nas tarefas foram retiradas de edições do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), do segundo volume do livro de Dante (2015) e também de sites da internet. Elas foram escolhidas com base no contexto que trazem os conteúdos, sendo mais próximos da realidade dos alunos, e também por permitirem discussões promissoras sobre aspectos da análise combinatória. As situações foram adaptadas para a dinâmica na perspectiva do EEM.

Para a realização das tarefas, deverão ser formados cinco grupos, com quatro ou cinco alunos em cada. A escolha dos membros dos grupos será a critério, em um primeiro momento, dos alunos.

Para o desenvolvimento da Tarefa 1, elas serão entregues impressas aos grupos, juntamente com uma folha em branco para que os alunos registrem suas resoluções. Os alunos devem ser orientados a identificar com os seus nomes as folhas de registro, que serão fotografadas ao final da fase de desenvolvimento para a discussão e a sistematização, além de servirem como material para avaliação.

O tempo disponível para a realização das propostas, considerando que são duas aulas de cinquenta minutos cada, será de uma hora e quarenta minutos. Dessa forma, a aula será dividida, respeitando as fases do EEM, da seguinte forma:

i) 10 minutos para a apresentação da tarefa;
ii) 45 minutos para o desenvolvimento da tarefa;
iii) 20 minutos para as discussões;
iv) 25 minutos para a sistematização.

DESENVOLVIMENTO

A primeira tarefa consiste em duas situações que têm como objetivo possibilitar a discussão do Princípio Fundamental da Contagem e, com a sistematização, relacionar com o operador fatorial. Para a introdução da tarefa, o professor pode pedir para um dos alunos ler as situações e, ao final, deve questionar se todos entenderam e assim dar início ao desenvolvimento.

Resolução da Tarefa 1

Situação 1: Maria estava passando em frente à uma loja e avistou uma grande promoção de roupas e calçados. Ela entrou na loja para conferir os produtos e gostou de 3 camisas, 3 calças e 2 pares de sapato. De quantas formas diferentes ela pode combinar as roupas e sapatos ao prová-las?
Resposta: 18 maneiras diferentes.

Estratégias: São 3 camisas. Para cada camisa podemos usar um entre três tipos de calça ($3 \cdot 3$*) e, para cada uma das combinações anteriores, podemos usar um entre dois tipos de sapato:*

$$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$

Exemplo de resolução por operação.

Deve-se atentar de que a escolha dos objetos não altera o produto.

Quando o professor estiver passando nos grupos e perceber que os alunos estão utilizando alguma das estratégias esperadas, deverá questioná-los, com a finalidade de compreender as estratégias utilizadas e certificar-se de que os alunos estão convictos de suas produções, podendo apresentar ou, a partir dos questionamentos, elaborar argumentos que justifiquem suas ideias.

Caso contrário, em que o professor verifica que os alunos não conseguiram desenvolver nenhuma estratégia para a situação, podem ser realizados questionamentos para identificar se os alunos compreenderam a situação e tentar buscar fornecer ideias que permitam aos alunos pensar em alguma estratégia. O professor pode utilizar como exemplo uma situação onde o indivíduo tem duas camisas e duas calças, questionando os alunos de quantas formas distintas pode-se combinar as roupas. Se ainda não houver avanço, o professor pode complementar a situação, dizendo que as camisas são, por exemplo, da cor azul e vermelha e que as calças são das cores preta e branca, assim o professor pode pedir que os alunos determinem as possibilidades através de uma enumeração ou diagrama de árvore.

Situação 2: Uma pessoa deseja visitar um amigo que mora no sexto andar de um prédio. Sabendo que esta pessoa não gosta de subir escadas e que o prédio possui quatro elevadores, determine:

a) De quantas maneiras diferentes é possível esta pessoa entrar e sair do prédio utilizando os elevadores?

São 4 elevadores pelos quais um indivíduo pode entrar e 4 pelos quais pode sair, já que é possível repetir.

Desta forma:

$$4 \cdot 4 = 16$$

Ou

Elevador		*Saída*			
		1	*2*	*3*	*4*
Entrada	*1*	*11*	*12*	*13*	*14*
	2	*21*	*22*	*23*	*24*
	3	*31*	*32*	*33*	*34*
	4	*41*	*42*	*43*	*44*

b) De quantas formas é possível entrar e sair do prédio, de maneira que o elevador utilizado para sair seja diferente do usado para entrar?

São 4 elevadores pelos quais a pessoa pode entrar. Para sair, o indivíduo não pode repetir o elevador que utilizou para entrar, logo $4 - 1 = 3$ *elevadores disponíveis para a saída. Assim, pelo princípio fundamental da contagem:*

$$4 \cdot 3 = 12$$

Portanto, são 12 formas diferentes de entrar e sair do prédio sem repetir o elevador utilizado. Caso os alunos utilizem estratégias como de enumeração ou diagrama de árvore, podem somente localizar os esquemas que representam os mesmos elevadores e subtrair do total de possibilidades encontrados no item a), sendo, portanto:

Elevador		*Saída*			
		1	*2*	*3*	*4*
Entrada	*1*	*11*	*12*	*13*	*14*
	2	*21*	*22*	*23*	*24*
	3	*31*	*32*	*33*	*34*
	4	*41*	*42*	*43*	*44*

$$16 - 4 = 12.$$

c) Se o indivíduo precisar ir uma segunda vez ao prédio, de quantas formas diferentes ele pode entrar e sair sem repetir, em nenhuma das vezes, um mesmo elevador?

Considerando que a pessoa havia entrado e saído anteriormente do prédio, para adentrar novamente, sem repetir os elevadores, terá disponível 2 elevadores para entrar e 1 elevador para sair. Desta forma, pelo princípio fundamental da contagem:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$$

Esta segunda situação tem por objetivo permitir a discussão do operador fatorial.

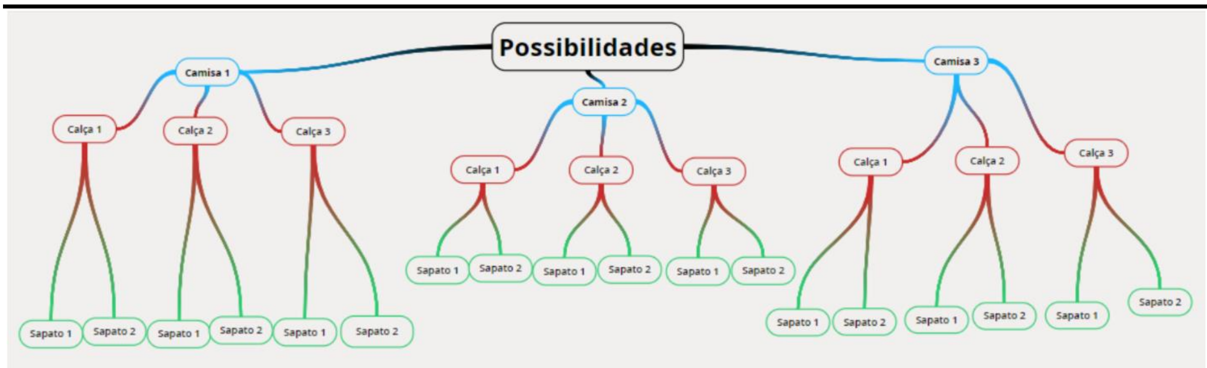
Discussão coletiva

Durante o desenvolvimento da tarefa, o professor deve acompanhar o trabalho dos alunos, auxiliando conforme seja necessário e, também, selecionando os grupos que utilizaram diferentes estratégias para apresentar os resultados obtidos aos colegas. A sequência adotada para as apresentações será do grupo que utilizou a enumeração, seguindo para o diagrama de árvore e finalizando com as operações e fórmulas. Desta forma, pretende-se que dois ou no máximo três grupos apresentem suas resoluções. Caso estratégias como o uso de diagramas ou operações não apareçam, o professor pode, juntamente com os alunos, desenvolver o raciocínio e discutir na sistematização.

Sistematização

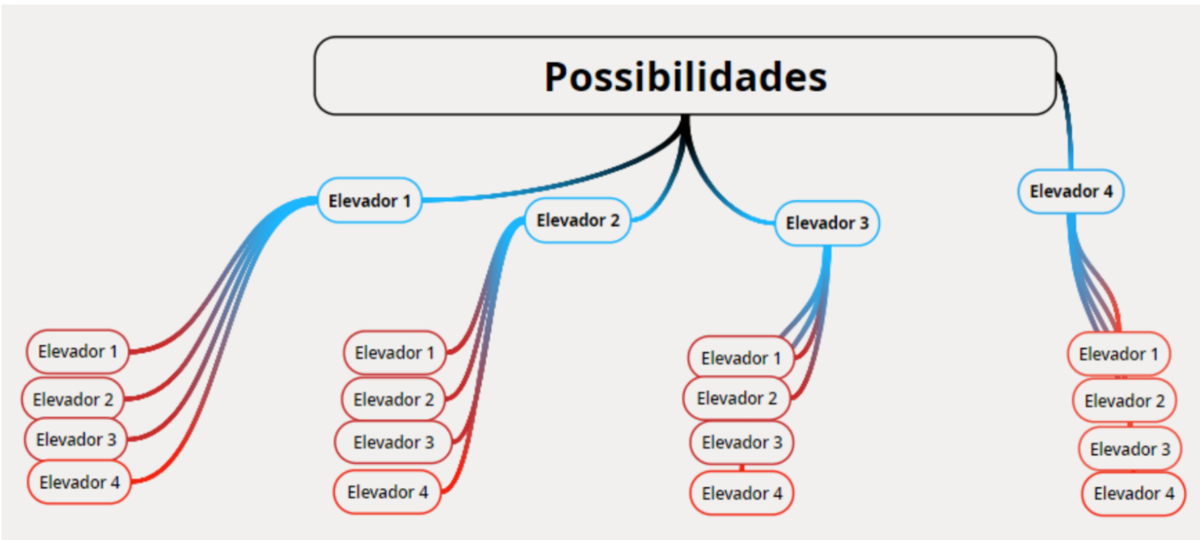
Alguns pontos que devem ser elucidados durante a sistematização: Em relação à situação 1:

- Analisar a situação utilizando a estratégia do diagrama de árvore, dando a ideia de que, se começarmos com as camisas, teremos três possibilidades. Com cada uma das camisas, teremos três tipos de calça para combinar, formando até então nove possibilidades. Para cada uma das combinações de camisa e calça, teremos duas possibilidades para sapatos, obtendo, portanto, dezoito formas diferentes de se vestir combinando a quantidade de peças de roupa fornecidas na situação. Deve-se realizar a discussão com os alunos para verificar se, alterando a ordem das peças de roupa, as possibilidades seriam diferentes, utilizando como fundamento a associatividade da multiplicação.

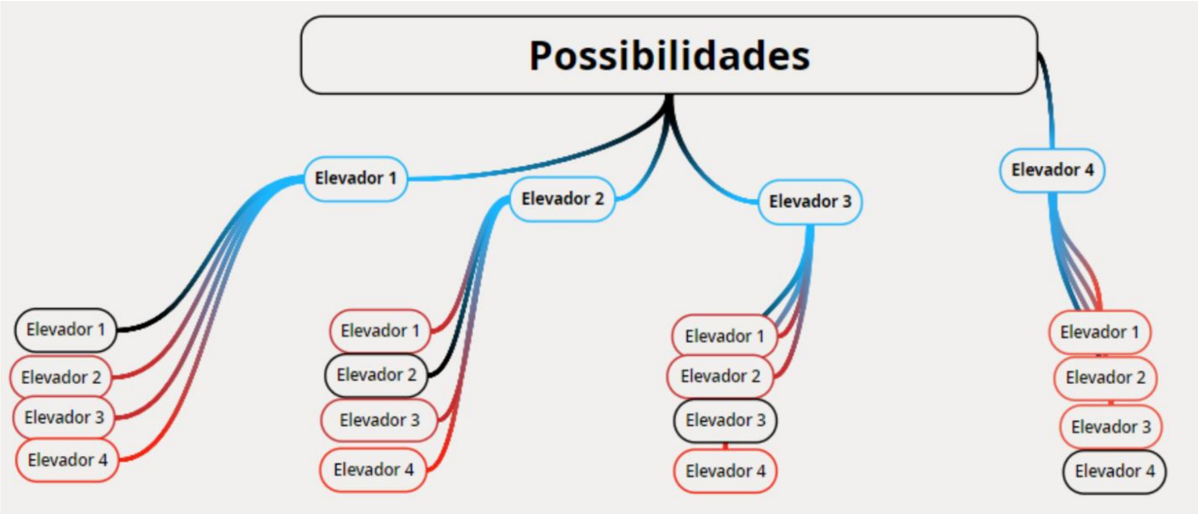


Em relação à situação 2:

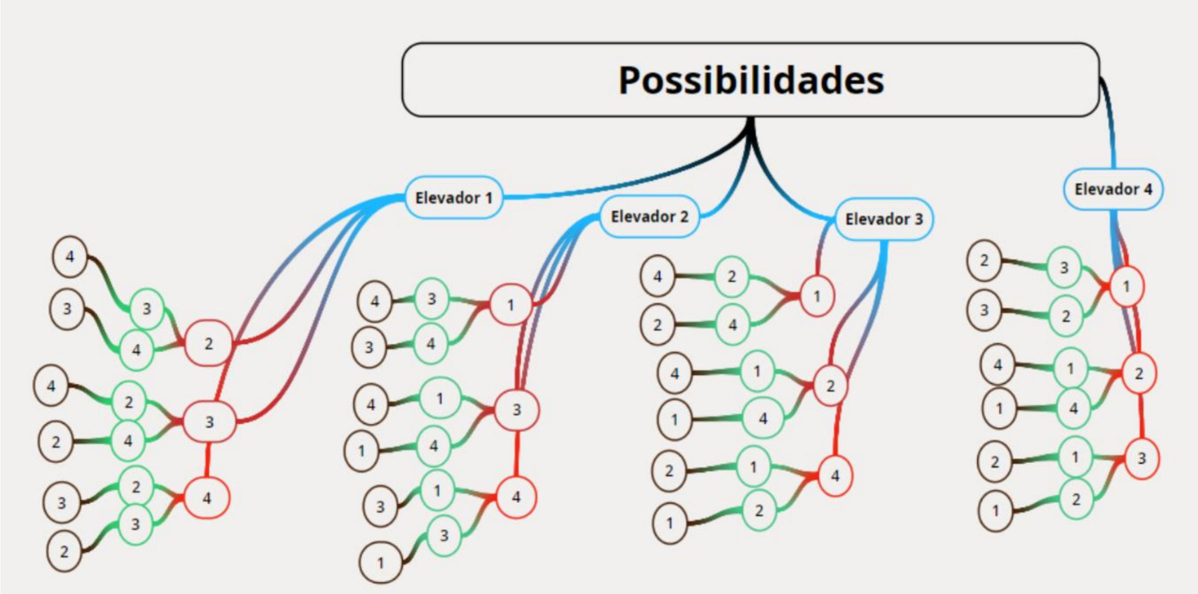
a) Pode-se utilizar o diagrama de árvore para ilustrar as possibilidades e chamar a atenção para o caso da reposição. Com isso, é possível relacionar com as operações, dando a ideia de que para a primeira escolha do elevador (para entrar) temos todos os quatro disponíveis para uso. Para sair, como é possível repetir (há reposição), teremos também todos os elevadores disponíveis para uso. Logo, para cada elevador escolhido para entrar, temos outros quatro disponíveis para sair. Assim, é possível relacionar com as operações.



b) Pode-se utilizar o diagrama de árvore, para apresentar as possibilidades, porém é possível questionar os alunos sobre se a quantidade de possibilidades irá aumentar ou diminuir, e o mais importante, o por que disto. Deve-se enfatizar a ideia de que não há reposição, portanto, um mesmo elevador utilizado para entrar não pode ser utilizado para sair. Assim, é possível apresentar a ideia de que, para entrar no prédio, teremos quatro elevadores disponíveis para uso, porém para sair um dos elevadores não estará mais disponível, portanto, deve- se subtrair está(s) possibilidade(s). Pode-se explorar a ideia da remoção dos quatro valores do total obtido no item anterior. Porém, deve-se utilizar do diagrama para ilustrar o caso em que temos quatro possibilidades de escolha para a primeira etapa e três possibilidades de escolha para a segunda, chegando nas operações.



c) Deve-se ilustrar as possibilidades por meio do diagrama e utilizar a ideia do item anterior para chegar nas operações, desenvolvendo o raciocínio de que para a primeira etapa temos quatro elevadores disponíveis, para a segunda teremos três elevadores, pois um deles não poderá ser repetido, e assim sucessivamente. Após, deve-se ilustrar a ideia da multiplicação do número quatro pelos seus antecessores naturais, introduzindo a notação do operador fatorial. Pode-se realizar alguns exemplos com os alunos a fim de que compreendam a ideia do operador fatorial como uma ferramenta que calcula as possibilidades de um evento em que não há reposição.



$$4 \cdot (4-1) \cdot (4-2) \cdot (4-3) = 4!$$

Com intenção da busca por generalizações, pode-se questionar os alunos a fim de saber como faríamos para determinar o fatorial de um número qualquer, para que os alunos compreendam o procedimento relacionado com o operador fatorial para um número generalizado n, por exemplo. Depois que apresentar a notação do operador fatorial para os alunos, deve- se voltar ao item b) da situação 2 e questionar os alunos de como é possível escrever a multiplicação usando o fatorial.

$$4 \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1}$$

Isto se dá para que os alunos tenham noção de como operar com o fatorial e que, mesmo implicitamente, tenham a noção que ajudará para a proposta relacionada aos arranjos e combinações.

Anotações para os alunos decorrentes da sistematização

Princípio fundamental da contagem: se um evento é composto por duas etapas sucessivas e independentes, sendo m o número de possibilidades da 1ª etapa e n o número de possibilidades para a 2ª etapa, então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto $m \cdot n$.

Fatorial: por meio do operador fatorial, podemos obter as possibilidades de um evento ocorrer, dado que não há reposições.

Este operador é definido, matematicamente, da seguinte forma:

Seja $n \in \mathbb{N}$. O fatorial de n (escrito como $n!$) é definido como:

$$n! = \begin{cases} o\ produto\ de\ todos\ os\ naturais\ até\ n, se\ n \geq 2 \\ 1, se\ n = 0\ ou\ n = 1 \end{cases}$$

Exemplos:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Simplificações:

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} = 5 \cdot 4 = 20$$

Neste momento, caso algum aluno pergunte o motivo de $0! = 1$, é possível realizar uma situação indutiva para mostrar que $0! = 1$ caso haja tempo disponível, apresentando a seguinte ideia:

$$4! = \frac{5!}{5!}\ ;\ 3! = \frac{4!}{4!}\ ;\ 2! = \frac{3!}{3!}\ ;\ 1! = \frac{2!}{2!}\ ;\ 0! = \frac{1!}{1!}$$

Referências

ALMEIDA, A. L.; FERREIRA, A. C. *Ensinando e Aprendendo Análise Combinatória com ênfase na Comunicação Matemática*. Desenvolvimento de material didático ou instrucional - Produto Educacional. 2010.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, Lisboa, n. 115, p. 11-17, 2011.

DANTE, L. R. *Matemática*: contexto e aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

ESTEVAM, E. J. G.; CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Análise de vídeos de aula na promoção de reflexões sobre o ensino exploratório de Estatística em uma comunidade de professores. *Quadrante*, v. 26, n. 1, p.145-169, 2017.

PAULEK, C. M.; ESTEVAM, E. J. G. Ensino exploratório de matemática: uma discussão sobre tarefas e a dinâmica da aula. In: *Libro de Actas do Congresso Iberoamericano de Educación Matemática*, 7, Madrid, España, p. 412-421. 2017.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.o ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, v. 22, n. 2, p. 19-53, 2013.

OLIVEIRA, H.; CARVALHO, R. Uma experiência de formação, com casos multimédia, em torno do ensino exploratório. *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. APM & CIEd da Universidade do Minho. 2013.