



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Tarefa 3 – Arranjo e combinação

Conteúdos: Arranjo e combinação

Fonte: ROSSA, E. P. de O. **Plano de aula do estágio de regência:** análise combinatória, princípio fundamental da contagem, fatorial, permutações simples e com repetições, combinações e arranjos. Universidade Estadual do Paraná – Campus União da Vitória. 2018.

TAREFA 3 – ARRANJO E COMBINAÇÃO

Situação 5: Em uma prova de natação, competem 5 atletas de países diferentes. De quantas maneiras distintas os atletas podem obter a primeira, segunda e terceira colocação no pódio?

Situação 6: Em uma festa de reencontro da turma do ensino médio, vários amigos se encontraram e, como de hábito, cumprimentaram-se com apertos de mãos dois a dois. Quantos apertos de mãos seriam dados, considerando que o grupo é constituído por:

- a) 3 amigos;
- b) 5 amigos.

PLANO DE AULA

Duração:

- 2h/aula

Conteúdos:

- Arranjo;
- Combinação.

Ano de escolaridade:

- 2º ano do Ensino Médio

Objetivo geral:

- Reconhecer, diferenciar e conceituar situações de análise combinatória.

Objetivo específico:

- Conceituar e reconhecer situações de Arranjo e Combinação.



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Recursos:

Para a realização das aulas previstas neste plano, serão necessários os seguintes recursos: folhas com tarefa(s) impressa(s); lousa e giz; caneta, lápis, borracha e caderno para a resolução das tarefas; câmera fotográfica, para registrar as resoluções para discussão coletiva; projetor e tela, para a discussão coletiva e a sistematização das aprendizagens.

Metodologia

A dinâmica adotada para as aulas previstas neste plano será pautada no Ensino Exploratório de Matemática (EEM).

O EEM pode ser entendido como uma perspectiva que se situa em uma compreensão de *inquiry-based teaching* (PAULEK; ESTEVAM, 2017). Esta perspectiva se difere do ensino tradicional devido aos papéis que são desempenhados pelo professor e pelos alunos, às tarefas que são propostas e à dinâmica da aula (OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013).

Ela coloca os alunos no centro do processo didático, no qual, a partir de tarefas desafiadoras e com ações consonantes do professor, estes são conduzidos a comunicar suas ideias e (in)compreensões, questionar ideias de outros, refletir sobre a necessidade ou vantagem de determinadas ideias ou estratégias de resolução, em uma dimensão colaborativa de aprendizagem (PAULEK; ESTEVAM, 2017, p. 412).

As aulas baseadas no EEM, levando em conta os papéis que professor e alunos devem desempenhar, geralmente são estruturadas em quatro fases distintas, porém interligadas. É importante ter em mente que aspectos considerados negativos na realização de uma das fases podem implicar em situações que dificultam ou comprometam as fases posteriores.

As fases são as seguintes:

i) *Introdução ou proposição da tarefa*: corresponde ao ato de o professor propor a tarefa aos alunos. Nesta fase, o professor necessita garantir a adesão dos alunos à tarefa e que se sintam desafiados a realizar o que lhes é proposto (OLIVEIRA, MENEZES; CANAVARRO, 2013). Para garantir a adesão, o professor necessita ouvir os alunos com atenção, percebendo suas dúvidas ou dificuldades e buscar esclarecê-las para que possam compreender a proposta realizada. Além disto, o professor deve fornecer as orientações necessárias para a exploração da tarefa e disponibilizar de ambiente e materiais necessários para a realização das fases seguintes da aula (OLIVEIRA; CARVALHO, 2013).

ii) *Desenvolvimento ou exploração da tarefa*: nesta fase, o foco está no trabalho dos alunos, podendo ser realizada em grupos ou individualmente. O papel do professor envolve garantir que todos participem de forma produtiva no desenvolvimento da tarefa, bem



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



como auxiliar os alunos, contribuindo para a construção ou aprimoramento das conjecturas apresentadas. Para Canavarro (2011), o professor deve dedicar-se a observar e ouvir os alunos, avaliar a validade matemática de suas ideias e interpretá-las, por mais que estas sejam estranhas ou diferentes das ideias antecipadas no planejamento.

Em relação aos alunos, estes devem, com seus colegas, explorar a tarefa, lendo as situações propostas e elaborando estratégias que permitam chegar em uma solução/resposta, com base nos conhecimentos que possuem, buscando justificar suas ideias. A elaboração destas estratégias deve partir dos alunos, sendo resultado de conjecturas de forma espontânea (individual), da interação com os colegas e/ou dos questionamentos do professor por meio das interações.

Durante as interações, o professor deve ouvir e interpretar as ideias apresentadas pelos alunos, sendo seu propósito avaliar os argumentos e justificativas apresentadas. Ainda nesta fase, deve-se orientar os alunos para que registrem suas ideias para uma possível apresentação aos colegas na fase seguinte.

Para a próxima fase, o professor, a partir da observação dos grupos, deve selecionar as ideias que julgar possuir maior relevância de acordo com seus objetivos, porém que permitam uma discussão rica do ponto de vista matemático, já levando em conta aspectos que podem ser abordados na sistematização. Os grupos de alunos devem ser escolhidos com base em critérios pré-estabelecidos pelo professor, não devendo limitar as apresentações a grupos que se voluntariam (CANAVARRO, 2011).

iii) *Apresentação e discussão das resoluções:* aqui os grupos de alunos selecionados na fase anterior apresentam suas ideias e resoluções aos colegas, justificando as estratégias utilizadas a fim de, juntamente com o professor, comparar diferentes resoluções, suas potencialidades e limitações (ESTEVAM, CYRINO; OLIVEIRA, 2017) e contribuir para novas aprendizagens relevantes, como conceitos, procedimentos e sobre modos de produção do conhecimento matemático (BOAVIDA, 2005 *apud* CANAVARRO; MENEZES; OLIVEIRA, 2014). Em relação ao papel do professor, este deve gerenciar a discussão, organizando e executando ações (como questionamentos, complementações, etc.) que permitam evidenciar os resultados obtidos pelos alunos e os respectivos argumentos que podem apresentar sobre suas estratégias.

iv) *Sistematização das aprendizagens:* já na fase final, a atenção deve estar voltada no professor, que necessita realizar uma aproximação ou relacionar as resoluções e estratégias apresentadas pelos alunos com os conhecimentos matemáticos sistematizados e objetivos da aula. Para isto, o professor convida os alunos a analisar, comparar e confrontar



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



as resoluções apresentadas, buscando perceber aspectos positivos e negativos das resoluções, graus de formalidade e potencialidades.

v) *Antecipação*: embora não constitua uma fase da aula, esta prática é apontada como essencial ao EEM porque consiste em “prever” situações que podem ocorrer em sala numa aula, devendo ser realizada anteriormente à aula. Se o professor realizar uma antecipação consistente, poderá ampliar seus argumentos quanto às orientações com os alunos, preparar-se para gerir possíveis discussões na discussão coletiva e elaborar elementos consistentes para a sistematização mínima, ou seja, estar suficientemente preparado para sistematizar aquelas ideias e estratégias que espera que seus alunos utilizem.

Informações

Serão apresentadas algumas considerações quanto à forma como será a proposta aos alunos e também algumas informações importantes que o professor deve levar em conta antes do início da tarefa. Em seguida, nas subseções presente em cada tarefa e intitulada “*Tarefa apresentada aos alunos*”, é apresentada a tarefa que será entregue aos alunos com cada uma das questões que a compõe. Os comentários em itálico, nessas subseções, são destinados ao professor e referem-se ao que deve ser esperado de cada questão e algumas orientações para que o professor possa auxiliar os alunos. Por fim, é descrito como a tarefa será sistematizada.

Em relação às resoluções das tarefas propostas, Fernandes e Correia (2007) são citadas por Almeida (2010) quando referem quatro estratégias de resolução de situações de análise combinatória, sendo elas: enumeração, diagrama de árvore ou diagrama das possibilidades, operações numéricas e, por último, fórmulas. A estratégia de enumeração envolve listar todas ou algumas possibilidades; o diagrama de árvore consiste na elaboração de um esquema que permite contar as possibilidades para os agrupamentos; as operações significam calcular as possibilidades a partir de uma significação sobre a ação realizada; e as fórmulas referem o uso de um algoritmo que não necessariamente possui significado para o aluno, mas que possibilita a obtenção de resultados. Esta última estratégia será menos provável de ocorrer, porque acredita-se que os alunos não tiveram contato formal com estes conteúdos no percurso escolar e isso dificultará o emprego direto de fórmulas/algoritmos. Sobre o grau de complexidade das estratégias que orientarão a seleção de resoluções para a discussão coletiva, será considerado, em ordem crescente, as estratégias de enumeração, diagrama de árvore, operações e fórmulas (contanto que para esta última os alunos apresentem uma boa justificativa), pois os dois primeiros casos necessitam que os alunos realizem ligações, tendo em conta que não esqueceram de nenhum elemento, enquanto as últimas requerem maior



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



reflexão sobre os significados das ações realizadas. Assim, serão consideradas as quatro estratégias como possíveis situações a emergir na resolução da tarefa 3.

Na discussão e sistematização da tarefa, pretende-se explicitar estas diferentes estratégias (principalmente o diagrama de árvore e as operações), com a intenção de fornecer modelos aos alunos que possibilitem dar significado aos conteúdos e refletir sobre aspectos que fundamentam, justificam e significam as fórmulas relacionadas à análise combinatória. Para isto, serão fotografadas e projetadas para toda a turma as resoluções dos grupos selecionados.

As situações presentes nas tarefas foram retiradas de edições do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), do segundo volume do livro de Dante (2015) e também de sites da internet. Elas foram escolhidas com base no contexto que trazem os conteúdos, sendo mais próximos da realidade dos alunos, e também por permitirem discussões promissoras sobre aspectos da análise combinatória. As situações foram adaptadas para a dinâmica na perspectiva do EEM.

Para a realização das tarefas, deverão ser formados cinco grupos, com quatro ou cinco alunos em cada. A escolha dos membros dos grupos será a critério, em um primeiro momento, dos alunos.

Para o desenvolvimento da Tarefa 3, elas serão entregues impressas aos grupos, juntamente com uma folha em branco para que os alunos registrem suas resoluções. Os alunos devem ser orientados a identificar com os seus nomes as folhas de registro, que serão fotografadas ao final da fase de desenvolvimento para a discussão e a sistematização, além de servirem como material para avaliação.

O tempo disponível para a realização das propostas, considerando que são duas aulas de cinquenta minutos cada, será de uma hora e quarenta minutos. Dessa forma, a aula será dividida, respeitando as fases do EEM, da seguinte forma:

- i) 10 minutos para a apresentação da tarefa;
- ii) 45 minutos para o desenvolvimento da tarefa;
- iii) 20 minutos para as discussões;
- iv) 25 minutos para a sistematização.

DESENVOLVIMENTO

A terceira proposta consiste numa tarefa que envolve duas situações. A primeira pretende possibilitar a discussão sobre Arranjo e a segunda sobre Combinação.



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Resolução da Tarefa 3

Situação 5: Em uma prova de natação, competem 5 atletas de países diferentes. De quantas maneiras distintas os atletas podem obter a primeira, segunda e terceira colocação no pódio?

Resolução: $\frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

São cinco atletas para serem dispostos em três “lugares”, portanto utilizando o Princípio Fundamental da Contagem pode ser realizado:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ possibilidades}$$

Os alunos podem realizar um esquema que represente todas as permutações e, após dispor de todos os agrupamentos, retirar os que possuem os mesmos três primeiros colocados na mesma ordem.

Espera-se que os alunos atentem-se à diferença entre a mudança de posição entre os membros do pódio, caracterizando uma situação em que a ordem importa.

Situação 6: Em uma festa de reencontro da turma do ensino médio, vários amigos se encontraram e, como de hábito, cumprimentaram-se com apertos de mãos dois a dois. Quantos apertos de mãos seriam dados, considerando que o grupo é constituído por:

a) 3 amigos;

Espera-se que os alunos atentem-se à situação, de maneira que o indivíduo A cumprimentar o indivíduo B representa o mesmo caso, portanto, a ordem não importa, devendo assim serem retirados os agrupamentos que repetem-se

Acredita-se que os alunos testem com seu grupo os apertos de mãos, de modo que permitam identificar o aspecto citado anteriormente.

Para este item, podem ser elaborados diagramas que representem os casos de cumprimentos. Caso os alunos observem as repetições, poderão retirar estes agrupamentos e assim obter a resposta para este item.

No caso das operações, pode-se tomar a permutação dos três amigos, obtendo seis agrupamentos. Caso percebam que os agrupamentos repetem-se duas vezes, poderão utilizar a ideia da divisão por dois, obtendo:



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



$$\frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3 \text{ apertos de mãos.}$$

b) 5 amigos.

Para este item, podem ser elaborados diagramas que representem os casos de cumprimentos. Caso os alunos observem as repetições, poderão retirar estes agrupamentos e assim obter a resposta para este item.

No caso das operações, podem perceber que como são cinco amigos, considerando que serão tomados sempre dois a dois e pelo Princípio fundamental da Contagem, podem realizar $5 \cdot 4$, obtendo 20 casos de agrupamentos. Porém, nesta conta está sendo contada duas vezes cada aperto de mão. Logo, deve-se contar somente metade destes agrupamentos, para isso basta dividir por 2, obtendo 10 cumprimentos.

Discussão coletiva

Durante o desenvolvimento da tarefa, o professor deve acompanhar o trabalho dos alunos, auxiliando conforme seja necessário e, também, selecionando os grupos que utilizaram diferentes estratégias para apresentar os resultados obtidos aos colegas. A sequência adotada para as apresentações será do grupo que utilizou a enumeração, seguindo para o diagrama de árvore e finalizando com as operações e fórmulas. Desta forma, pretende-se que dois ou no máximo três grupos apresentem suas resoluções. Caso estratégias como o uso de diagramas ou operações não apareçam, o professor pode, juntamente com os alunos, desenvolver o raciocínio e discutir na sistematização.

Sistematização

Em relação à situação 3:

Para dar início à sistematização, pode-se questionar os alunos sobre a relevância de informações sobre os elementos que estão além dos três primeiros lugares. Caso percebam que apenas os elementos que importam são os que estão no pódio, deve-se questionar sobre se há ou não diferença em relação às permutações entre os mesmos indivíduos que alcançaram o pódio, a fim de dar ênfase à importância da ordem para este caso.

Pode-se desenvolver a ideia de que, como somente as três primeiras posições são relevantes, pelo Princípio Fundamental da Contagem, podemos realizar:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \text{ possibilidades.}$$



Deve-se fomentar a discussão iniciada na primeira proposta deste planejamento, que consistia na ideia de “parar” as multiplicações de um fatorial em determinado número. Assim, com a colaboração dos alunos, deve-se chegar em:

$$\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \textit{possibilidades}.$$

Em relação à situação 6:

- a) para a primeira situação, deve-se utilizar o quadro abaixo, questionando os alunos sobre a possibilidade e ou relevância de cumprimentar a si mesmo e também sobre a relação entre o indivíduo A cumprimentar o indivíduo B e vice-versa. Deve ser apresentada a ideia de que a partir da permutação de três elementos, obtemos os outros seis elementos presentes no quadro. Porém, temos que eles estão repetindo-se e, como neste caso a ordem não importa, estes agrupamentos devem ser desconsiderados.

	A	B	C
A	AA	AB	AC
B	BA	BB	BC
C	CA	CB	CC

Pode ser realizada a seguinte operação:

$$\frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2!}{2!} = 3 \textit{ cumprimentos}.$$

- b) para este segundo caso, pode-se utilizar o quadro abaixo para ilustrar a situação. Como neste caso são cinco amigos, sabendo que são agrupados dois a dois, temos pelo princípio fundamental da contagem que $5 \cdot 4 = 20$ agrupamentos que diferem pela ordem. Porém, novamente deve-se enfatizar que, nesta situação, a ordem não possui relevância. Como cada agrupamento repete-se duas vezes, precisamos tomar metade destes agrupamentos. Portanto:

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \textit{ cumprimentos}.$$

	A	B	C	D	E
A	AA	AB	AC	AD	AE
B	BA	BB	BC	BD	BE
C	CA	CB	CC	CD	CE



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



<i>D</i>	<i>DA</i>	<i>DB</i>	<i>DC</i>	<i>DD</i>	<i>DE</i>
<i>E</i>	<i>EA</i>	<i>EB</i>	<i>EC</i>	<i>ED</i>	<i>EE</i>

A partir das duas situações, a título de generalização, é possível relacionar a ideia de combinação como um arranjo no qual a ordem não importa, portanto devem ser retiradas as permutações dos elementos.

Anotações para os alunos decorrentes da sistematização

Arranjo: são agrupamentos em que se considera a ordem dos elementos, ou seja, se tomarmos os mesmos elementos em agrupamentos diferentes, eles são considerados distintos.

Matematicamente, temos:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}, \text{ lê-se Arranjo de } n \text{ elementos tomados } p \text{ a } p.$$

Observação: A permutação é um caso particular do arranjo, em que $n = p$.

Combinação: são agrupamentos em que não se considera a ordem dos elementos, ou seja, se tomarmos os mesmos elementos em agrupamentos diferentes, eles serão considerados uma única vez.

Matematicamente, temos:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \text{ lê-se Combinação de } n \text{ elementos tomados } p \text{ a } p.$$

Referências

ALMEIDA, A. L.; FERREIRA, A. C. *Ensinando e Aprendendo Análise Combinatória com ênfase na Comunicação Matemática*. Desenvolvimento de material didático ou instrucional - Produto Educacional. 2010.

CANAVARRO, A. P. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, Lisboa, n. 115, p. 11-17, 2011.

DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



ESTEVAM, E. J. G.; CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M. Análise de vídeos de aula na promoção de reflexões sobre o ensino exploratório de Estatística em uma comunidade de professores. *Quadrante*, v. 26, n. 1, p.145-169, 2017.

PAULEK, C. M.; ESTEVAM, E. J. G. Ensino exploratório de matemática: uma discussão sobre tarefas e a dinâmica da aula. In: *Libro de Actas do Congresso Iberoamericano de Educación Matemática*, 7, Madrid, España, p. 412-421. 2017.

OLIVEIRA, H.; MENEZES, L.; CANAVARRO, A. P. Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.o ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, v. 22, n. 2, p. 19-53, 2013.

OLIVEIRA, H.; CARVALHO, R. Uma experiência de formação, com casos multimédia, em torno do ensino exploratório. *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. APM & CIEd da Universidade do Minho. 2013.