



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Tarefa 2 – Pacotes de balas

Conteúdo: Estatística (média, moda, mediana e distribuição de dados)

Fonte: BORUCH, I. G. de S. **Planejamento das atividades do estágio de regência**. Universidade Estadual do Paraná, União da Vitória. 2017.

TAREFA 2 – PACOTES DE BALAS

Em uma determinada empresa que fabrica e embala balas em pacotes, o setor de controle de qualidade supervisiona a linha produção com o intuito de prezar pela padronização das embalagens. Contudo, algumas variações no conteúdo das embalagens de 700 gramas são identificadas diariamente em amostras coletadas. Em uma amostra de doze pacotes, que foram coletados aleatoriamente, foram registradas as seguintes quantidades de balas.

Quantidade de Balas por Pacote					
98	100	101	98	99	100
102	100	101	101	100	98

Considerando esses valores, resolva as seguintes questões:

- Observando a quantidade de balas por pacote na tabela acima, quantas balas podemos considerar/esperar que haja em um pacote qualquer desse mesmo tipo? Explique seu raciocínio.
- Observando a quantidade de balas por pacote na tabela acima e sabendo que o peso do pacote é 700 gramas, qual o peso médio de cada bala?
- Construa um gráfico para representar os dados da tabela acima e represente a média da quantidade de balas por pacote nesse mesmo gráfico.

Tarefa retirada de Estevam, Cyrino e Oliveira (2015).

PLANO DE AULA

Duração:

- 2h/aula

Ano de escolaridade:

- 1° ano do Ensino Médio

Objetivos específicos:



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



-
- Diferenciar média, moda e mediana;
 - Compreender o significado e identificar moda e mediana de uma amostra;
 - Construir gráficos que representam a distribuição de dados;
 - Interpretar gráficos que representam a distribuição de dados.

Metodologia

Ao analisar a perspectiva habitual de ensino de Estatística pode-se observar a crença de que ensinar estatística resume-se a ensinar técnicas de construção de gráficos e tabelas, bem como os algoritmos para o cálculo das medidas de tendência central (ESTEVAM, 2014). Entretanto, segundo Quintas, Oliveira e Ferreira (2011), ao realizar o ensino da Estatística se deveria dar maior ênfase aos dados e aos conceitos estatísticos, bem como ao desenvolvimento dos aspectos básicos do pensamento estatístico. As autoras também destacam que:

Em vez de ser praticado um conjunto de capacidades e procedimentos desconectados, deve atender-se à especificidade da Estatística, envolvendo os alunos em atividades que promovam o desenvolvimento do raciocínio e do pensamento estatístico, as capacidades de comunicação e o espírito crítico (QUINTAS; OLIVEIRA; FERREIRA, 2011, p. 40).

Cyrino e Oliveira (2016) também afirmam que para o efetivo desenvolvimento intelectual dos educandos se faz necessário o engajamento dos alunos e professor em tarefas nas quais consigam desenvolver seu raciocínio lógico, comunicação e espírito crítico. Além disso, as autoras afirmam que:

O processo de ensino e aprendizagem deve ser encarado como um processo de inquirição que é construído conjuntamente pelo professor e alunos de forma dialógica. O ensino deve assim colocar a ênfase no aluno e nas condições que favoreçam participar na atividade de inquirição, colaborativa e individualmente. Nessa perspectiva, aquilo que aprendemos é o que fazemos (CYRINO; OLIVEIRA, 2016, p. 23).

Wells (2004) discorre sobre implicações para o ensino, das quais Cyrino e Oliveira (2016) destacam: 1) para a construção do conhecimento é necessária a utilização de problemas e questões que sejam significativas para os alunos, favorecendo sua compreensão; 2) a autonomia individual, a capacidade para ação e a colaboração devem ser estimulados e desenvolvidos; 3) o modo de conhecer apenas pode ser construído a partir de experiências anteriores, ao lidar com problemas que surgem no decurso de atividades práticas específicas; 4) a linguagem tem um papel central, uma vez que medeia o conhecimento, encarado como um processo de atribuição de conhecimento, e é o principal meio da atividade de ensino e aprendizagem. Dessa forma, o ensino exploratório de Matemática mostra-se como alternativa



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



metodológica importante para a efetivação do processo de ensino e aprendizagem, uma vez que em tal metodologia busca-se trazer o aluno para o centro da atividade matemática da sala de aula por meio da realização de tarefas matemáticas significativas e desafiadoras, as quais geralmente introduzem novos conteúdos utilizando-se dos conhecimentos já estabelecidos pelos alunos anteriormente.

Segundo Canavarro, Oliveira e Menezes (2012), uma aula exploratória geralmente é estruturada em quatro fases: introdução da tarefa, exploração da tarefa, discussão da tarefa e sistematização das principais aprendizagens. Na fase de introdução, o professor apresenta uma tarefa matemática à turma, a qual pode ser, por exemplo, um problema ou investigação, exigindo interpretação por parte dos alunos. É papel do professor assegurar, em poucos minutos, que os alunos entendam o que se espera que façam e que se sintam desafiados a trabalhar na tarefa. O professor também é incumbido de organizar o desenvolvimento do trabalho pela turma, estabelecendo o tempo a dedicar às diferentes fases, gerindo os recursos a usar e definindo os modos de trabalho dos alunos (CANAVARRO; OLIVEIRA; MENEZES, 2012).

Na fase de exploração os alunos realizam a tarefa em duplas ou pequenos grupos e o professor deve garantir o desenvolvimento da mesma, contudo, tomando cuidado para não comprometer a autonomia dos alunos e sem diminuir o desafio cognitivo da tarefa, bem como não uniformizar as estratégias de resolução. O professor precisa também garantir que os alunos se preparem para apresentar o seu trabalho à turma toda e que produzam materiais adequados em tempo útil para a fase de discussão (CANAVARRO; OLIVEIRA; MENEZES, 2012; CYRINO; OLIVEIRA, 2016). Em seguida, o professor seleciona algumas resoluções feitas pelos alunos para discuti-las com a turma.

Após a fase de exploração, o professor inicia a próxima fase, cujo foco será a discussão da tarefa e as resoluções selecionadas anteriormente. Nessa fase o professor "(...) tem de orquestrar a discussão, não apenas gerindo as intervenções e interações dos diferentes alunos, mas também promovendo a qualidade matemática das suas explicações e argumentações" (CANAVARRO; OLIVEIRA; MENEZES, 2012, p. 257). É importante também que o professor mantenha um ambiente apropriado à apresentação e discussão das ideias matemáticas dos alunos.

A última fase do processo é a sistematização, fase que é mais centrada no professor e em que se busca formalizar os conteúdos e ideias que derivam da resolução da tarefa. Nessa fase podem surgir novos conceitos ou serem revistos e sintetizados outros conceitos e procedimentos já conhecidos pelos alunos, além de se estabelecer conexões ente o conteúdo abordado pela tarefa e outros tópicos e conteúdos matemáticos (CYRINO; OLIVEIRA, 2016).



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Considerando a relevância do exposto, para realização do estágio de regência optou-se por utilizar a metodologia de ensino exploratório, uma vez que se pretende priorizar a qualidade do acesso ao conhecimento por parte dos alunos, bem como discutir aspectos conceituais acerca do conteúdo, e como trata Vygotsky (1986), um dos fatores principais para que se efetive o processo de ensino e aprendizagem é a comunicação e a linguagem. Dessa forma, o aluno como o protagonista do seu conhecimento poderá identificar os conceitos de cada tarefa primeiramente na sua linguagem, na sua forma particular de compreensão, cabendo ao momento de sistematização a abordagem científica e generalizada do conhecimento. Isso inverte o processo de transposição do científico para o didático para o processo da generalização pelo científico, a partir da compreensão particular de cada aluno. Sendo assim, serão propostas tarefas aos alunos, as quais serão realizadas em pequenos grupos, por meio das quais se buscará introduzir, discutir e sistematizar conteúdos relacionados a medidas de tendência central.

DESENVOLVIMENTO

Todo o desenvolvimento deste plano será particionado conforme as aulas em que se pretende desenvolver as tarefas. Em cada descrição de aula estarão presentes os recursos necessários, a forma que se pretende desenvolvê-la e os materiais que serão entregues aos alunos. No presente plano apresentam-se ainda possíveis questionamentos que podem ser feitos aos alunos com intuito de verificar se de fato a aprendizagem está ocorrendo, bem como possibilidade de sanar possíveis dúvidas. No decorrer das aulas é possível que esses questionamentos sejam alterados (acrescentados outros ou substituídos), caso se verifique a necessidade.

Aula 4

Com o desenvolvimento da tarefa *Pacotes de Balas* pretende-se diferenciar as três medidas de tendência central abordadas no presente plano de aula: *Média, Moda e Mediana*. Além disso, almeja-se realizar a construção de gráficos que representem a distribuição dos dados. Os alunos se dividirão em trios e o período disponível para a exploração da tarefa será de 80 minutos, sendo, assim, necessária a utilização de 30 minutos da aula do dia 18 para a conclusão da exploração da tarefa.

Inicialmente serão distribuídas tarefas aos alunos e solicitado que ao fim da aula cada grupo entregue ao professor uma das folhas com a resolução do grupo. Após a entrega das tarefas será realizada uma leitura, com intuito de sanar possíveis dúvidas dos alunos em



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



relação aos enunciados, principalmente sobre alguns termos que possam ser desconhecidos aos alunos.

Na questão 1 espera-se que os alunos observem os dados representados na tabela, reflitam sobre estes e concluam que é esperado que haja em um pacote com 100 balas. No entanto, há, ao menos, duas possibilidades para concluir tal fato: i) observado que a média da amostra é aproximadamente 100 balas; ii) verificando que a quantidade que mais se repete é de 100 balas (moda).

Os alunos podem também argumentar que o valor esperado para um pacote seria de 100 balas, pois o valor mediano é 100, argumentando que este é o valor médio dos dados, já que está no meio da distribuição. Isso ocorre quando há “confusão” entre o conceito de média e mediana. Considerando o exposto, com a primeira questão espera-se discutir as diferenças entre média, moda e mediana, diferenciando cada uma das medidas de tendência central.

Com a questão 2 espera-se que os alunos consigam concluir o algoritmo da determinação da média aritmética de uma amostra. Para isso, espera-se que os alunos primeiro percebam que se faz necessário somar a quantidade de balas de cada um dos doze pacotes e, em seguida, dividir a massa dos doze pacotes pela soma das balas destes pacotes. É possível também que os alunos concluam que cada bala possui 7 gramas utilizando a conclusão por eles tirada na questão 1 de que em um pacote espera-se conter 100 balas e que o peso médio de um pacote de balas é de 700 gramas. Assim, o peso médio de uma bala seria de 700 (peso de cada pacote) divididos por 100 (quantidade de balas esperadas em um pacote).

Ao desenvolver a questão 3 espera-se que os alunos relembrem como construir um gráfico, bem como compreendam que, ao construir um gráfico, pretende-se representar os dados de modo que, ao observá-lo, seja possível compreender qual a quantidade de pacotes da amostra e quantas balas há nos pacotes. Além disso, espera-se que os alunos observem graficamente que a média dos valores da variável é o valor que torna a distribuição equitativa, ou seja, o valor que se aproxima de todos os outros valores da amostra.

Ao final da aula o professor recolherá a tarefa com as respostas de cada grupo que serão concluídas na aula seguinte.

Resolução da tarefa:

Em uma determinada empresa que fabrica e embala balas em pacotes, o setor de controle de qualidade supervisiona a linha produção com o intuito de prezar pela padronização das embalagens. Contudo, algumas variações no conteúdo das embalagens de 700 gramas são



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



identificadas diariamente em amostras coletadas. Em uma amostra de doze pacotes, que foram coletados aleatoriamente, foram registradas as seguintes quantidades de balas.

Quantidade de Balas por Pacote					
98	100	101	98	99	100
102	100	101	101	100	98

Considerando esses valores, resolva as seguintes questões:

- a) Observando a quantidade de balas por pacote na tabela acima, quantas balas podemos considerar/esperar que haja em um pacote qualquer desse mesmo tipo? Explique seu raciocínio.
- 1- 100 balas, pois é o valor que mais se repete na amostra (observando a moda).
 - 2- 100 balas, pois é o valor aproximado da média da quantidade de balas nos pacotes.
 - 3- 100 balas, pois, distribuindo os valores em ordem, o valor 100 é o valor médio da quantidade de balas (ocorre quando há confusão entre os conceitos de média e mediana).
- b) Observando a quantidade de balas por pacote na tabela acima e sabendo que o peso do pacote é 700 gramas, qual o peso médio de cada bala?
- 1- 0.14 gramas. (Quando se divide 100 gramas por 700 gramas).
 - 2- 7 gramas. (Quando se divide o peso médio de um pacote pela moda de pacotes de bala).
 - 3- 7.01 gramas. (Quando se divide o peso total dos pacotes de bala pela quantidade total de balas).
- c) Construa um gráfico para representar os dados da tabela acima e represente a média da quantidade de balas por pacote nesse mesmo gráfico.
- Podem ser construídos histogramas e gráfico de pontos. Caso Os alunos levantem a hipótese de outros gráficos o professor deve discutir com os alunos se o gráfico sugerido permite a representação dos dados do problema, bem como da média de balas no pacote.*

Aula 5

Nos primeiros 20 minutos da quinta aula ocorrerá a conclusão da exploração da tarefa 2 pelos grupos. Após a conclusão da exploração da tarefa nos grupos ocorrerá sua discussão. Para isso, serão selecionados dois ou três grupos para que enviem representantes até o quadro para resolver a tarefa e explicar seu raciocínio. Os critérios para escolha dos grupos serão semelhantes àqueles utilizados na discussão da tarefa 1. Após as resoluções e explicações de cada grupo o professor fará comentários sobre as resoluções, permitindo e



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



incentivando a participação dos alunos, de modo a realizar uma reflexão sobre as questões e respectivas resoluções, permitindo tirar conclusões acerca das mesmas.

Por fim, se dará a sistematização do conteúdo. Tal sistematização tomará como base as resoluções dos alunos, bem como as discussões realizadas durante a aula, de modo a formalizar as definições de *média*, *moda* e *mediana* de uma amostra de dados quantitativos. Também será abordada na sistematização os algoritmos de determinação de cada uma das medidas de tendência central.

O quadro abaixo apresenta os conteúdos que se pretende sistematizar, incluindo as possíveis definições/explicações a serem passadas no quadro. Cabe ressaltar que de acordo com o desenvolvimento da tarefa novos conteúdos podem emergir e, conseqüentemente, serem sistematizados.

<i>Conteúdo</i>	<i>Definição/explicação</i>
Média	Soma de todos os valores do conjunto analisado, dividida pela quantidade de elementos. É o valor que deixa a distribuição de dados equilibrada.
Moda	Elemento que mais aparece no conjunto de dados.
Mediana	É o valor do meio de um conjunto de dados ordenados de forma crescente ou decrescente. Caso a distribuição tenha uma quantidade par de elementos, a mediana é dada pela média dos dois valores centrais.
Propriedade da Média	A média não precisa, necessariamente, coincidir com algum dos valores a partir do qual foi calculada.
Propriedade da Média	A média é o valor que está mais próximo de todos os valores da distribuição.

Quadro 2 – Sistematização da tarefa 2

Fonte: O autor.

Na sistematização também será abordado que a existência das três medidas de tendência central se dá pelo fato de que nem sempre uma das medidas representa o conjunto de dados estudados, ou que nem sempre é possível determiná-las.

No momento da sistematização serão lançados questionamentos de caráter desafiador aos alunos, com intuito de avaliar se de fato a aprendizagem está ocorrendo, bem como auxiliar no processo de compreensão de cada uma das medidas de tendência central. Um exemplo de questão seria determinar se a variável *dia da semana* possui todas as três medidas de tendência central e, caso não possua, qual o motivo faz isso ocorrer.

Espera-se que o processo de discussão e sistematização demande cerca 50 minutos.



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Avaliação

A metodologia de Ensino Exploratório que será utilizada durante as aulas visa proporcionar ao aluno explorar novos conhecimentos por meio da realização de tarefas matemáticas significativas, utilizando-se dos conhecimentos já estabelecidos por ele anteriormente. Logo, esta metodologia não fará com que o aluno esteja subjugado somente à necessidade da interlocução de um professor para adquirir um conhecimento. Em outras palavras, com as tarefas que serão propostas busca-se possibilitar ao aluno adquirir o conhecimento sobre conceitos estatísticos no âmbito da sua subjetividade e, após ele ter acesso a esse “a ser conhecido”, como trata Heidegger (1995), cabe ao professor sistematizar o que de fato a tarefa propõe de novos conhecimentos, ao ponto que pode proporcionar neste momento discussões sobre assunto e dando oportunidade ao aluno institucionalizar o conhecimento adquirido (PAIS, 2001), com o intermédio do professor. Disso, é necessário avaliar o que o aluno está aprendendo na forma que ele explorou e interpretou a tarefa, verificando se de fato o conhecimento foi adquirido, ou como tratam Basniak e Estevam (2014):

[...] a avaliação não é algo que ocorre somente ao final do processo, como se fosse uma etapa a ser cumprida. Ao contrário, deve acompanhar todo o processo de ensino e aprendizagem, considerando os erros dos alunos como importantes para os encaminhamentos das próximas tarefas a serem realizadas (p. 31).

Com isso, verifica-se que a avaliação contínua pode expressar aquilo que se buscará na realização do estágio de regência: identificar se nesse processo de ensino-aprendizagem, o educando adquiriu conhecimentos em relação ao conteúdo desenvolvido, avaliando o envolvimento do aluno durante as aulas, e não somente no fechamento dos conteúdos.

Paulo e Santos (2011) afirmam que, ao avaliar o aprendizado de um aluno, se avalia aquilo que o aluno conseguiu expressar sobre o conteúdo, muitas vezes baseado numa comparação com aquilo que se pretendia ensinar. Verificando esta ideia consonante com o Ensino Exploratório, serão elaboradas questões que norteiem, indaguem e desenvolvam o pensamento do aluno sobre a tarefa, pretendendo que o aluno se envolva e discorra sobre aquilo que compreendeu naquela aula. Assim, o principal foco das avaliações será com base nas resoluções e justificativas dos alunos sobre as questões presentes nas tarefas aplicadas.

O envolvimento dos alunos em sala de aula, tanto durante o desenvolvimento das tarefas quanto no momento da sistematização, também será levado em conta para a determinação das notas dos alunos relacionadas ao desenvolvimento das tarefas. Assim,



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



determina-se um peso de 8 para as questões que os alunos responderão e 2 para o envolvimento em classe para as notas das tarefas.

Referências

- BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G (Org.). *O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica*. Curitiba: Ithala, 2014.
- CANAVARRO, A.; OLIVEIRA H.; MENEZES, L.; Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In: Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática, 2012. Castelo de Vide. *Actas...* Portalegre: SPIEM, 2012, p. 255-266.
- CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M.; Ensino Exploratório e casos multimídia na formação de professores que ensinam matemática. In: CYRINO, M. C. C. T. (Org.). *Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática*. Londrina: Eduel, 2016.
- ESTEVAM, E. J. G.; Estatística na Educação Básica: Reflexões sobre alguns pressupostos. In: BASNIAK, M. I.; ESTEVAM, E. J. G (Org.). *O GeoGebra e a Matemática da Educação Básica*. Curitiba: Ithala, 2014.
- HEIDEGGER, M. *Ser e tempo*. 3. ed. Petrópolis: Vozes, 1995.
- PAIS, L. C. Momentos pedagógicos e as situações didáticas. In: _____. *Didática da Matemática: Uma análise francesa*. Autêntica, 2001. p. 65-75.
- PAULO, R. M.; SANTOS, J. C. A. P. Avaliação em Matemática: uma leitura de concepções e análise do vivido na sala de aula. *Ciência & Educação*, v. 17, n. 1, p. 183-197, Bauru: SP, 2011.
- QUINTAS, S. M. O.; OLIVEIRA, H. M. A. P.; FERREIRA, R. A. O. F. T.; O conhecimento didático em Estatística: Um estudo exploratório com professores de Matemática no Ensino Secundário. *Nuances: estudos sobre Educação*, Presidente Prudente, SP, v. 18, n. 19, p. 36-51, jan./abr. 2011.
- WELLS, G. *Dialogic inquiry: Towards a Sócio-cultural Practice and Theory of Education*. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.