



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



## Tarefa 1 – Círculo trigonométrico

**Conteúdo:** Trigonometria

Fonte: ZIELKE, E. **Plano de aula de estágio de regência – matemática no Ensino Médio.** Universidade Estadual do Paraná – Campus União da Vitória. 2019.

### TAREFA 1 – CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

- 1) Utilizando o círculo trigonométrico de EVA e *lembrando que sua angulação é dada no sentido anti-horário e que ele possui 360°*, assim como qualquer circunferência e que 0° e 360° são ângulos coincidentes. Vamos movimentar o fio sobre a circunferência saindo sempre da marcação de início que denota o ângulo 0° e o ângulo 360°, seguindo a fração que está sendo pedida, com base nisso responda em qual ângulo o fio ficará após percorrer:
  - a)  $\frac{1}{4}$  de volta da circunferência?
  - b)  $\frac{1}{2}$  de volta da circunferência?
  - c)  $\frac{3}{4}$  de volta da circunferência?
  - d)  $\frac{1}{8}$  de volta da circunferência?
  - e)  $\frac{2}{6}$  de volta da circunferência?
- 2) Com base no exercício anterior, determine qual vai ser a angulação TOTAL percorrida pelo fio após:
  - a) Dar uma volta?
  - b) Dar uma volta e um quarto?
  - c) Dar uma volta e meia?
  - d) Dar uma volta e três quartos?
  - e) Dar duas voltas?
- 3) Utilizando o círculo trigonométrico dado, identifique o quadrante onde se localiza a extremidade de cada ângulo dado e a fração do arco percorrida para chegar nas seguintes angulações:
  - a) 120°:
  - b) 45°:
- 4) Qual a regularidade para encontrar as angulações maiores que 360° e como é possível generalizá-la para encontrar a angulação de qualquer giro maior do que uma volta?

### PLANO DE AULA



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



---

*Duração:*

- 2h/aula

*Conteúdo:*

- Trigonometria.

*Ano de escolaridade:*

- 2º ano do Ensino Médio

*Objetivo específico:*

- Identificar as unidades de medida de ângulo e arcos no ciclo trigonométrico.

*Recursos:*

Durante o desenvolvimento das aulas serão utilizadas tarefas impressas, círculo trigonométrico de EVA, conteúdo impresso, caderno, quadro negro, giz, computador e datashow. As tarefas impressas serão utilizadas para otimizar o tempo, pois tarefas como as de ensino exploratório exigem um pouco mais de tempo e atenção dos alunos.

O quadro negro e o giz serão utilizados na discussão e sistematização da tarefa de ensino exploratório, na correção de atividades e na formalização dos conteúdos. O datashow será utilizado durante as discussões e sistematização das tarefas, assim como para formalizar o restante do conteúdo e passar exercícios para os alunos realizarem em aula. O conteúdo será passado em slides devido ao curto período de tempo de aula disponível, lembrando que são disponibilizadas duas aulas por semana, sendo estas em dias diferentes e dessa forma, passar o conteúdo no quadro e pedir para que os alunos copiem vai tomar um tempo desnecessário da aula, tal tempo que pode ser usado para realizar exercícios e tirar dúvidas. O conteúdo impresso será entregue aos alunos para otimizar o tempo deles, sem que seja necessário ficar copiando dos slides passados em sala, e desta forma a atenção dos alunos será voltada somente à explicação dada em aula e eles poderão colar o conteúdo e definições dadas em seu caderno, para que posteriormente possam utilizar como meio de estudo. O caderno, além de ser uma base para colar os conteúdos, será utilizado pelos alunos na realização de exercícios feitos em sala e passados para realizar como tarefa de casa.

*Metodologia*

As metodologias utilizadas no decorrer das aulas são: ensino exploratório e aula expositiva dialogada.



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



A aula utilizando como metodologia o ensino exploratório é geralmente estruturada em três ou quatro fases: a fase em que o professor apresenta a tarefa aos alunos, a fase da exploração pelos alunos, a fase de discussão e sistematização e também após a discussão o professor pode solicitar um relatório sobre a tarefa e a discussão feita para poder avaliar se o aluno aprendeu ou não com a tarefa.

A tarefa apresentada é frequentemente um problema ou uma investigação que exige a interpretação do aluno e esta é realizada pelo mesmo sem necessariamente terem sido apresentados aos conceitos ou definições sobre o conteúdo.

De acordo com Canavarro (2011), no ensino exploratório tanto o professor quanto o aluno tem um papel importante: o professor é responsável pela seleção da tarefa exploratória tendo em vista seu objeto de estudo, deve assegurar-se que os alunos entendam o que se espera que façam e que se sintam desafiados a trabalhar na tarefa, também é responsável por conduzir a aula desafiando os alunos a pensarem, e ao final da resolução da tarefa ao sistematizar as produções dos alunos através de discussões coletivas; e o aluno que, ao procurar estratégias para a resolução da tarefa busca seus conhecimentos anteriores para construir novos conhecimentos.

No desenvolvimento das tarefas exploratórias há um trabalho em conjunto entre professor e aluno, mesmo que de maneiras distintas, pois o professor atua como mediador e o aluno constrói o conhecimento. Enquanto a metodologia de aula expositiva e dialogada segundo Alves e Anastasiou (2004) é aquela em que ocorre a exposição do conteúdo com participação ativa dos alunos, apresentação do conteúdo considerando-se o conhecimento prévio dos mesmos. O professor é o mediador que leva os alunos a questionarem, interpretarem e discutirem o objeto de estudo.

De tal maneira as tarefas nessa perspectiva de ensino, serão propostas após a exposição do conteúdo, exemplos relacionados e esclarecimento de possíveis dúvidas, sendo essas tarefas corrigidas juntamente com os alunos, onde estes poderão envolver-se e participar assim da aula.

## DESENVOLVIMENTO

Para iniciar as aulas, será necessário estabelecer alguns acordos pedagógicos com os alunos em busca do bom andamento das aulas.

Além disso, será necessário fazer uma breve explicação de como vai ocorrer algumas das aulas dadas, pois será trabalhado com a metodologia de ensino exploratório e os alunos



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



não possuem domínio de como reagir frente às aulas diferentes do que estão habituados a ter.

Logo após, será solicitado que os alunos façam grupos de três integrantes da sua escolha e a professora estagiária entregará a Tarefa 1 e o círculo trigonométrico em EVA para cada grupo e fará a leitura da atividade em voz alta e tirará as possíveis dúvidas dos alunos referente a interpretação da tarefa e manuseio do material em EVA.

### *Resolução da Tarefa 1 – Círculo trigonométrico*

- 1) Utilizando o círculo trigonométrico de EVA e *lembrando que sua angulação é dada no sentido anti-horário e que ele possui 360°*, assim como qualquer circunferência e que 0° e 360° são ângulos coincidentes. Vamos movimentar o fio sobre a circunferência saindo sempre da marcação de início que denota o ângulo 0° e o ângulo 360°, seguindo a fração que está sendo pedida, com base nisso responda em qual ângulo o fio ficará após percorrer:

*Espera-se que os alunos consigam encontrar uma relação entre o valor total da angulação do círculo trigonométrico (360°) com a fração solicitada, buscando relacionar e encontrar a angulação referente a cada parte da circunferência solicitada pela questão. E que cheguem na angulação correta referente a cada questão, sendo elas:*

- a)  $\frac{1}{4}$  de volta da circunferência? 90°
  - b)  $\frac{1}{2}$  de volta da circunferência? 180°
  - c)  $\frac{3}{4}$  de volta da circunferência? 270°
  - d)  $\frac{1}{8}$  de volta da circunferência? 45°
  - e)  $\frac{2}{6}$  de volta da circunferência? 120°
- 2) Com base no exercício anterior, determine qual vai ser a angulação TOTAL percorrida pelo fio após:
- a) Dar uma volta? 360°
  - b) Dar uma volta e um quarto? 450°
  - c) Dar uma volta e meia? 540°
  - d) Dar uma volta e três quartos? 630°
  - e) Dar duas voltas? 720°



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



- 3) Utilizando o círculo trigonométrico dado, identifique o quadrante onde se localiza a extremidade de cada ângulo dado e a fração do arco percorrida para chegar nas seguintes angulações:

*Espera-se que os alunos consigam realizar o processo inverso, saindo de uma angulação para chegar em uma fração da circunferência, assim como observem e identifiquem em qual quadrante as seguintes angulações estão situadas:*

- a)  $120^\circ: \frac{1}{3}$  e  $2^\circ$  quadrante
- b)  $45^\circ: \frac{1}{8}$  e  $1^\circ$  quadrante

- 4) Qual a regularidade para encontrar as angulações maiores que  $360^\circ$  e como é possível generalizá-la para encontrar a angulação de qualquer giro maior do que uma volta?

*Espera-se que os alunos consigam associar que para encontrar as angulações maiores do que  $360^\circ$  é necessário calcular e observar quantos graus a mais de  $360^\circ$  a volta possui e com isso espera-se que para encontrar a angulação de qualquer giro maior do que uma volta eles associem que é necessário somar  $360^\circ$  com a fração de volta dada a mais.*

Os alunos deverão desenvolver a tarefa em sala de aula e poderão contar com o auxílio da professora estagiária que cumprirá o seu papel instigando os alunos a pensarem e a concluírem o que a tarefa pede.

Após os grupos concluírem a Tarefa 1, a professora escolherá pelo menos dois grupos para a discussão da tarefa, então estes em sua vez deverão ir ao quadro negro e explicar o raciocínio utilizado para o desenvolvimento da tarefa, sendo também questionados sobre.

Assim, a professora utilizará das diferentes formas de pensar dos grupos e sistematizar o conteúdo. A sistematização da tarefa será feita com auxílio do GeoGebra seguida de definições, exemplos e exercícios que serão passadas pela professora através de uma apresentação no PowerPoint e o conteúdo também será entregue impresso para os alunos para que eles coleem em seus cadernos e possam estudar posteriormente. Os exercícios serão realizados em sala se sobrar tempo na aula, caso contrário será pedido aos alunos que realizem os exercícios em seus cadernos em casa para corrigir na próxima aula.



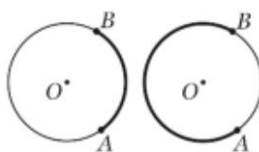
Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



## Círculo Trigonométrico

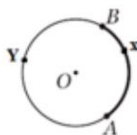
### Arco de uma circunferência:

Considere dois pontos quaisquer A e B, em uma circunferência. Esses dois pontos dividem a circunferência em duas partes. Cada uma dessas partes, incluindo os pontos A e B, é chamada de **arco da circunferência** e pode ser indicada por  $\widehat{AB}$ .



### Arco de uma circunferência:

Essa nomenclatura gera uma ambiguidade que pode ser resolvida se nos referirmos a um arco menor  $\widehat{AB}$  ou arco maior  $\widehat{AB}$ . Outra maneira de resolver essa situação é destacar mais um ponto sobre o arco a que pretendemos nos referir e indicá-lo com o auxílio desse ponto adicional:



Dessa forma, também podemos chamar o arco menor de  $\widehat{AXB}$  e o arco maior de  $\widehat{AYB}$ .

## Arco de uma circunferência:

Também existem dois casos particulares de arcos de circunferência:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Quando as extremidades A e B de um arco são simétricas em relação ao centro O da circunferência <math>\widehat{AB}</math> corresponde ao diâmetro. Dizemos que <math>\widehat{AB}</math> é uma semicircunferência ou um arco meia volta.</p>  | <p>Quando as extremidades de um arco A e B são coincidentes, dizemos que os arcos determinados são o arco de uma volta ou um arco nulo.</p>  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## Medida e comprimento de arcos:

Ao construir arcos na circunferência, está implícita a existência de um ângulo central (nos casos anteriores, o vértice O no centro da circunferência) correspondente a cada arco tomado.

Um arco de circunferência apresenta duas formas de medida: a **angular** e a **linear**.

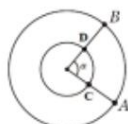
Por definição, a **medida angular** de um arco é igual à medida do ângulo central correspondente.



## Medida e comprimento de arcos:

O ângulo  $\alpha$  também pode ser denominado como ângulo  $\widehat{AOB}$  e a sua medida é igual a **medida angular** do arco  $\widehat{AB}$ .

Por definição, a **medida linear** de um arco é a medida de seu comprimento. A medida angular e linear são diferentes por que a medida angular não depende da medida do raio da circunferência, já o comprimento sim. Nas circunferências abaixo, temos  $\widehat{AB} = \widehat{CD} = \alpha$ , mas os comprimentos dos arcos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{CD}$  são diferentes.



LEMBRETE: O comprimento da circunferência é dado por  $C = 2\pi r$ .



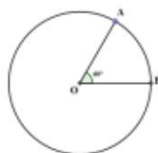
Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



## O grau

Uma das unidades de medida de arco é o grau:  $1^\circ$  (um grau) é a medida angular de cada arco de uma circunferência que foi dividida em 360 arcos de comprimentos iguais. Dizemos então, que a circunferência mede  $360^\circ$  (trezentos e sessenta graus).

Observando a figura abaixo, podemos afirmar que a medida  $\widehat{AOB} = 60^\circ$

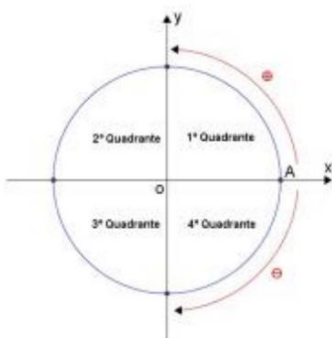


## Circunferência Trigonométrica

Seja um plano com um par de eixos ortogonais  $Ox$  e  $Oy$  que se intersectam no ponto  $O$ , determinando um sistema cartesiano ortogonal. Nele, considere uma circunferência de raio unitário (raio medindo uma unidade) e centro  $O$  coincidente com a origem do sistema.

Os eixos ortogonais dividem a circunferência em quatro partes iguais, denominadas quadrantes. Ao determinar que todos os arcos tomados nessa circunferência terão origem no ponto  $A(1,0)$ , sendo positivos no sentido anti-horário e negativos no sentido horário, temos uma **circunferência trigonométrica**, também chamada de **ciclo trigonométrico**.

## Circunferência Trigonométrica



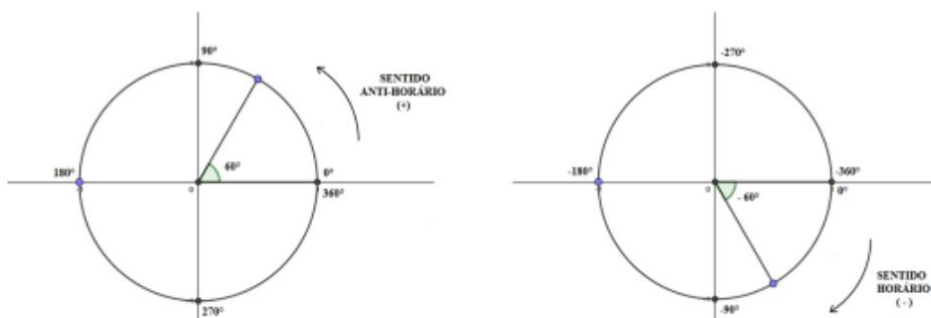
$$\alpha \in QI, \text{ se e somente se, } 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$$

$$\alpha \in QII, \text{ se e somente se, } 90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$$

$$\alpha \in QIII, \text{ se e somente se, } 180^\circ \leq \alpha \leq 270^\circ$$

$$\alpha \in QIV, \text{ se e somente se, } 270^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$$

## Circunferência Trigonométrica



### Como determinar em que quadrante está situado um arco com mais de 360°?

Um arco com mais de 360°, dá mais de uma volta no ciclo trigonométrico. Seja  $\alpha > 360^\circ$ , para saber em que quadrante  $\alpha$  está, precisamos calcular quantos graus  $\alpha$  tem a mais que 360°. Para isso, fazemos:

$$\alpha - 360^\circ = \beta$$

Com isso, podemos dizer que um arco de ângulo  $\alpha$  tem a mesma extremidade de um arco  $\beta$  e pertencem ao mesmo quadrante.

### Exemplo:

Determine o quadrante em que está situado o arco de 480°.



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



## Como determinar em que quadrante está situado um negativo?

Um arco com menos de  $0^\circ$  está situado em uma volta negativa, ou seja, uma volta que possui a direção no sentido horário. Seja  $\alpha < 0^\circ$  e sabendo que existe um ângulo  $\beta > 0^\circ$  que possui a mesma extremidade que  $\alpha$  mas está no sentido positivo, para saber em que quadrante  $\alpha$  está, precisamos saber qual é a extremidade de  $\beta$  no ciclo trigonométrico. Para isso, fazemos:

$$\alpha + 360^\circ = \beta$$

### Exemplo:

Determine o quadrante em que está situado o arco de  $-110^\circ$ .

### Arcos côngruos

Dois arcos são congruentes ou côngruos, quando possuem a mesma extremidade. Convém trabalhar com arcos da 1ª volta, do sentido positivo. Caso isso não ocorra, como por exemplo com  $480^\circ$ , determinamos o seu côngruo da 1ª volta positiva.

Uma forma mais simples de obtermos esse resultado, é dividir  $480^\circ$  por  $360^\circ$  para extrair o número de voltas. O resto da divisão é a medida do arco de mesma extremidade:

$$\begin{array}{r} 480^\circ \div 360^\circ \\ -360^\circ \quad 1 \rightarrow \text{n}^\circ \text{ de voltas no sentido } + \\ \hline 120^\circ \rightarrow \text{medida do arco de mesma extremidade} \end{array}$$

Desta forma,  $480^\circ$  e  $120^\circ$  são arcos côngruos pois possuem a mesma extremidade.



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



---

## Arcos côngruos

Para medidas negativas, esse procedimento nos leva ao arco côngruo da 1ª “volta negativa”. Daí, basta somarmos  $360^\circ$  para chegarmos à 1ª “volta positiva”.

### Exemplo:

$-157^\circ$

### Referências

ANASTASIOU, Léa das Graças Camargos; ALVES, Leonir Pessate. *Processos de ensinagem na Universidade: pressupostos para as estratégias de trabalho em aula*. 3.ed. Joinville: Univille, 2004. p. 79.

CANAVARRO, Ana Paula. *Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios*. Lisboa: Universidade Aberta, 2011.