



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



PLANO DE AULA - DESLIZANDO SOBRE O TRIÂNGULO<sup>1</sup>

**MATEMÁTICA**

**Secundário – 10.ºC**

**Lições n.º 121 e 122**

TÓPICO: Funções e Gráficos

SUBTÓPICOS: Função Quadrática

SUMÁRIO:

Estudo da Função Quadrática. Resolução de Problemas em trabalho de grupo.

**PRINCIPAIS OBJETIVOS DA AULA**

- Identificar a parábola como gráfico da função quadrática;
- Estudar algumas propriedades do gráfico da função quadrática e entender o seu significado no contexto dos problemas;
- Utilizar a calculadora gráfica como recurso ao estudo da função.

**PRINCIPAIS TÓPICOS, NOÇÕES OU CONCEITOS ENVOLVIDOS**

- Noção de função;
- Propriedades das funções: domínio, contradomínio, sinal, zeros, monotonia e extremos;
- Equações de 2.º grau;
- Área de polígonos.

**CAPACIDADES TRANSVERSAIS**

- Resolução de Problemas;
- Comunicação Matemática.

**RECURSOS**

**A trazer pelo aluno**

**A trazer pelo professor**

<sup>1</sup> Matias, A. F. F. S. **A Comunicação matemática escrita no 10.º Ano de escolaridade em contexto de trabalho de grupo**. 2015. Lisboa: UNIVERSIDADE DE LISBOA - INSTITUTO DE EDUCAÇÃO. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/22535?mode=full>.



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



→ Manual (Parte 2); → Calculadora gráfica; → Caderno diário.	→ Calculadora gráfica; → Computador; → Fichas de trabalho; → Canetas para quadro branco
--	--

#### METODOLOGIA DA AULA

Desenvolvimento de trabalho em pequenos grupos (3 a 4 elementos) - Fichas de trabalho. Sistematização, em turma, da resolução dos problemas realizados, com recurso ao sketchpad.

#### MOMENTOS DA AULA

→ (1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam.	5 minutos
→ (2) Resolução, em pequenos grupos, de uma Ficha de Trabalho (“Deslizando sobre o triângulo”)	45 minutos
→ (3) Resolução, em pequenos grupos, de uma Ficha de Trabalho (“Áreas e Perímetros de retângulos”)	20 minutos
→ (4) Sistematização dos tópicos trabalhados.	15 minutos
→ (5) Marcação do TPC.	5 minutos

#### DESENVOLVIMENTO DA AULA

#### TEMPO PREVISTO

<b>(1) Registo do sumário no caderno dos alunos. Anotação dos alunos que faltam.</b>	<b>5 minutos</b>
<b>(2) Resolução, em pequenos grupos, da Ficha de Trabalho “Deslizando sobre o triângulo”</b>	<b>45 minutos</b>
<u>Nota:</u> O professor deve pedir aos alunos que formem os grupos de trabalho habituais. Algumas alterações: - O Miguel deverá integrar o grupo do Guilherme, Mário e Francisco Pontes; - O Gonçalo deverá integrar o grupo do João, Pedro e Daniel; - A Mafalda deverá integrar o grupo do Afonso, Alexandra e Ana Madalena. O professor deve circular pelos grupos e:	



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



- Fazer um levantamento de questões que possam surgir e que devam ser discutidas em grande grupo;
- Esclarecer dúvidas pontuais, orientando os alunos para atingirem o objetivo da tarefa;
- Acompanhar o trabalho desenvolvido pelos alunos, fazendo questões orientadoras de forma a ajudar os alunos a ultrapassar as dificuldades, tendo em conta (1) as estratégias utilizadas; (2) o ritmo de trabalho dos diferentes grupos;

### **(2.1) Resolução do exercício 1.1.**

**Dificuldades:** Alguns alunos poderão ter dificuldade em calcular a distância entre os pontos A e D.

Os alunos deverão identificar a semelhança entre os triângulos [BCE] e [ADE] e traduzi-la na razão entre comprimentos: **que polígonos estão representados na figura? De que forma poderei calcular a área do trapézio? Haverá relação entre a o comprimento de [AD] e alguma outra medida?**

Possíveis estratégias de resolução:

(E1) Cálculo da área do trapézio, usando a sua fórmula:  $\frac{(B+b)}{2} h$

(E2) Cálculo da área do trapézio como diferença da área de dois triângulos: [EBC] e [EAD]

### **(2.2) Resolução do exercício 1.2.**

Após a resolução de **1.1**, os alunos não deverão ter dificuldades em fazer o exercício **1.2**.

Os alunos deverão perceber que a razão entre a base e a altura dos triângulos é de 1.

Deverão ser alertados para a justificação dos cálculos que utilizam.

### **(2.3) Resolução do exercício 1.3.**

**Dificuldades:** Alguns alunos poderão sentir alguma dificuldade em fazer o raciocínio inverso ao das alíneas anteriores. Deve-se apelar ao seu método de resolução da área do trapézio e reforçar



os dados que têm agora e os dados que querem descobrir.

Os alunos podem recorrer à calculadora gráfica para resolver a equação de 2.º grau.

Os alunos devem compreender que apenas uma das soluções da equação é resposta ao problema. Poderá aqui ser questionado o domínio da área do trapézio em função do deslocamento  $x$ , sem antes ter sido escrita a sua expressão.

#### **(2.4) Resolução do exercício 1.4.**

**Dificuldades:** Alguns alunos poderão ter a tendência de desenhar um gráfico linear.

Neste caso, os deverão ser alertados para as três alíneas anteriores que relacionam a área do trapézio  $[ABCD]$  com o deslocamento  $x$ . Deverão compreender que estes valores representam pontos do gráfico, e devem ser utilizados para fazer o esboço. Deverão também ser alertados para outros pontos notáveis da função.

***O que acontece à área do trapézio, quando  $P$  coincide com  $M$ ? E quando  $P$  coincide com  $E$ ?***

#### **(2.5) Resolução do exercício**

##### **1.5. Dificuldades:**

- (1) Os alunos que tiverem dificuldade em resolver a alínea deverão ser confrontados com o método que utilizaram para o cálculo da área do trapézio nas alíneas anteriores.
  - Deve pedir-se que escrevam a área do trapézio, representando as distâncias necessários através dos pontos assinalados;
  - Devem escrever, então, as distâncias desconhecidas em função do deslocamento  $x$ .
- (2) Após fazerem o esboço do gráfico (1.4), à partida já não haverá dificuldades em identificar o domínio e contradomínio da função. No entanto, caso ainda haja dificuldades neste sentido, poderão ser colocadas as questões:



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



*Onde se pode deslocar o ponto P? Quais serão os valores que  $x$  poderá tomar?*

*Que valores toma a área do trapézio, quando P coincide com M? E quando P coincide com E?*

### **(2.6) Resolução do exercício 2**

Neste exercício, os alunos serão confrontados com a questão domínio da função/domínio do problema. Deverão perceber que no exercício anterior estavam a considerar uma restrição do domínio da função.

#### **Dificuldades:**

À partida não haverá dificuldades relativas ao uso da calculadora para encontrar os zeros e o máximo da função, pois os alunos já estão habituados a este tipo de exercício. No entanto, caso ainda haja dúvidas, serão dadas instruções nesse sentido. Também as noções de sinal e monotonia já são conhecidas pelos alunos.

### **(2.7) Resolução do exercício 3.**

#### **Possíveis estratégias de resolução:**

**(E1)** Cálculo da área do trapézio, usando a sua fórmula:  $\frac{b \times h}{2}$

Os alunos deverão seguir o raciocínio do exercício 1, utilizando a razão entre a base e a altura dos triângulos. Assim rapidamente concluirão que

$$\overline{AD} = \overline{PE} = 5 - x.$$

**(E2)** Cálculo da área do triângulo [EAD] como diferença entre a área do triângulo [EBC] e do trapézio [ABCD].



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



Os alunos que optarem por esta resolução, terão apenas que calcular a área do triângulo [EBC], uma vez que a área do trapézio já foi calculada (e é enunciada na ficha)

#### **(2.8) Resolução do exercício 4.**

Neste exercício, os alunos serão confrontados com a questão domínio da função vs. domínio do problema. Deverão perceber que no exercício anterior estavam a considerar uma restrição do domínio da função.

#### **Dificuldades:**

À partida não haverá dificuldades relativas ao uso da calculadora para encontrar os zeros e o máximo da função, pois os alunos já estão habituados a este tipo de exercício. No entanto, caso ainda haja dúvidas, serão dadas instruções nesse sentido.

Também as noções de sinal e monotonia já são conhecidas pelos alunos.

**20 minutos**

#### **(3) resolução, em pequenos grupos, da Ficha de Trabalho “Áreas e Perímetros de retângulos”**

**Nota:** A ficha de trabalho será dada a cada grupo à medida que vão terminando a ficha de trabalho anterior. Caso haja alunos que não cheguem a realizá-la na aula, levarão a ficha para TPC.

#### **(3.1) Resolução do Exercício 1.**

Os alunos não deverão ter dificuldades em desenhar os retângulos, mas haverá uma tendência para desenharem retângulos cujos lados têm como medida números inteiros. Deveser pedido que desenhem, pelo menos, 4 retângulos.

Para o cálculo das áreas dos retângulos, também não devem surgir dúvidas.

#### **(3.2) Resolução do Exercício 1.1.**



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



Os alunos deverão começar por encontrar a outra medida do lado do retângulo, para, então, calcular a sua área. Não deverão surgir dificuldades na realização deste exercício.

### **(3.3) Resolução do Exercício 1.2.**

**Dificuldades:** Alguns alunos poderão escrever uma equação com duas variáveis que representam ambos os lados do retângulo. Caso não consigam resolver o problema, deve-lhes ser pedido para relacionar uma variável com a outra. A representação do retângulo poderá ajudar.

***Se um dos lados do retângulo for  $x$ , quanto medirá o outro?***

### **(3.4) Resolução do Exercício 2.**

Após a resolução do exercício anterior, os alunos já deverão conseguir expressar um lado do retângulo em função do outro. Os alunos deverão, então, recorrer à calculadora para esboçar o gráfico e calcular o seu máximo.

Deverão, também, fazer a interpretação geométrica do gráfico obtido. ***Que tipo de gráfico obtemos? Que retângulo obtemos quando a sua área é máxima?***

**Dificuldades:** Poderão surgir algumas dúvidas relativamente ao domínio da função. Os alunos podem considerar um de dois casos:  $x \in ]0, 10[$  ou  $x \in ]0, 5]$ . Os alunos que considerarem o primeiro caso, devem ser levados a questionar-se sobre as dimensões dos retângulos, a simetria da função e o seu significado geométrico. Quanto aos que considerarem o segundo caso, devem recordar que a área é escrita em função de um dos lados, logo, o lado pode tomar qualquer valor entre 0 e 10.

Os alunos voltarão a ser confrontados com a questão domínio da



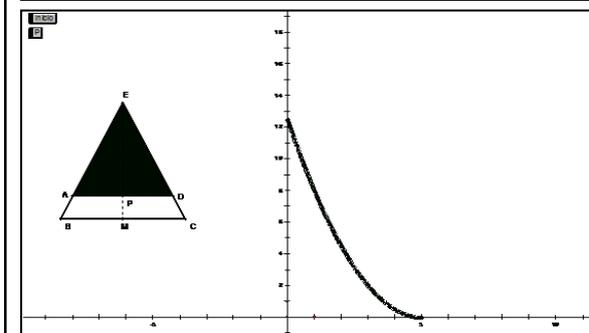
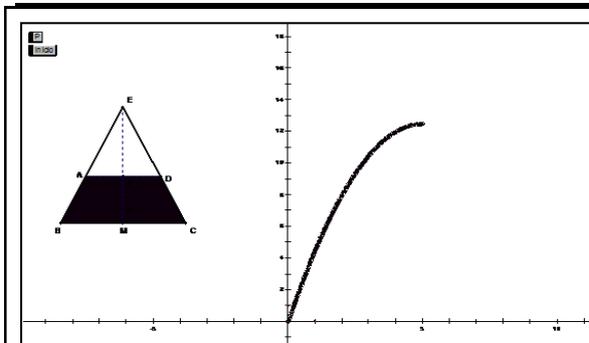
Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



<p>função/domínio do problema. Deverão perceber que no exercício anterior estavam a considerar uma restrição do domínio da função.</p> <p>(4) <b>Sistematização dos tópicos trabalhados.</b></p> <p><b>Nota:</b> A sistematização será feita apenas se todos os alunos terminarem na aula, ambas as tarefas propostas.</p> <p>Através do programa <i>sketchpad</i>, os alunos vão poder observar o gráfico que traduz a área do trapézio e do triângulo, em função do deslocamento de P. Poderão comparar o gráfico com o esboço que fizeram e confirmar se as expressões que encontraram traduzem as relações entre a área dos polígonos e o deslocamento <math>x</math>.</p>	<p><b>15 minutos</b></p>
--	--------------------------

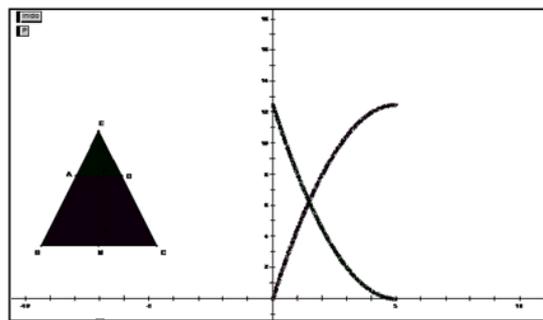


Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



- Também se observarão os dois gráficos em simultâneo, de forma a interpretar geometricamente a situação:

- Quando o ponto P coincide com M, que os valores tomam as áreas dos polígonos?
- E quando coincide com E?
- Quando é que os polígonos têm áreas iguais?



Aquando da discussão, os alunos deverão também ser questionados quanto:

- ao domínio e contradomínio da função e domínio e contradomínio no contexto do problema;
- às semelhanças/diferenças entre as características dos gráficos das funções (extremos, monotonia, simetria).

**5 minutos**

**(5) Registrar, no quadro, o trabalho para casa.**

Resolver o exercício 32 da página 42 e propostas 11, 12 e 13



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



--	--

### DADOS SOBRE AS APRENDIZAGENS DOS ALUNOS

Apesar das tarefas da aula serem realizadas em grupo, serão recolhidas as resoluções de todos os alunos, o que permitirá avaliar se cada grupo é coerente no trabalho apresentado, se foram escolhidas diferentes estratégias de resolução por parte dos grupos de alunos, de que forma os alunos fazem o registo deste tipo de tarefas investigativas e de que forma apresentam os seus registos relativos a exercícios que exijam o recurso à máquina calculadora gráfica.

### ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Sendo esta uma turma bastante heterogénea, há alunos que têm um ritmo de trabalho bastante superior a outros alunos.

Como se pretende recolher todas as fichas relativas à primeira ficha de trabalho ("*Deslizando sobre o triângulo*"), a discussão da tarefa não será feita de seguida, sendo dada uma segunda ficha de trabalho àqueles que terminarem.

Apenas se iniciará a discussão da tarefa em grande grupo, caso a maioria dos alunos termine a segunda ficha de trabalho. Caso contrário será feita na aula seguinte.

Ainda assim, caso algum grupo termine ambas as tarefas mais rapidamente do que os outros grupos, ser-lhes-á sugerido que resolvam os exercícios propostos para trabalho de casa.

Caso a **planificação prevista não seja cumprida**, a segunda tarefa proposta para a aula será proposta para trabalho para casa.