TAREFA INCOMENSURABILIDADE[1]

5.1- Aula 1- Mensurando o incomensurável.

Nesta tarefa é apresentado como foco a exploração do paradigma de medição por unidades e frações, baseado na descoberta das medidas incomensuráveis já descritos nosCapítulo II.

Objetivos e etapas

As Etapas desta tarefa consistem em: Medição do comprimento do lado e da diagonalde quadrados utilizando como recurso réguas genéricas e peças da escala Cuisinaire. Objetivos:Propor situações sobre o conceito de incomensurabilidade para que os estudantes possam: a) verificar que não é possível encontrar uma unidade com a qual seja possível medir com exatidão o lado e a diagonal; b) experimentar as possibilidades de quebra de paradigma da medição através de unidades; c) realizar a releitura do processo histórico da construção dos números irracionais.

Para tal, cada grupo recebeu um roteiro de atividade com as seguintes orientações:

Quadro 1- tarefa 1

1 Medir o lado e a diagonal de quadrados diversos (em final do roteiro) utilizando réguas genéricas sem escala de medida e peças da escalaCuisinaire.

2. Registro e análise das possibilidades.

3. Produção de registro dissertativo sobre as investigações e experiências.

A expectativa principal na aplicação desta atividade era a percepção, mesmo que experimental, de que existem empecilhos para a medição exata da diagonal de qualquer quadrado com a utilização de uma unidade e suas frações.

[1] ROCHA, R.R.M. **Sensibilidade para existência dos números irracionais.** 2018. Dissertação (Universidade Federal do Rio de Janeiro).Seropédica, 2018. Disponível em: https://tede.ufrrj.br/jspui/handle/jspui/2612

Dinâmica

A turma foi dividida em grupos, a principio era previsto formar grupos com três integrantes, e as carteiras foram distribuídas e divididas com este intuito.

A fase da aula que antecedeu a aplicação da tarefa foi à apresentação da proposta, com as orientações devidas sobre preenchimento do questionário de perfil do estudante e do termo de livre concordância. Também foram esclarecidos os objetivos das tarefas de uma forma geral.Este processo durou em torno de 30 minutos.

G1- Partindo da maior peça.

Composto por três componente iniciaram prontamente a atividade. Demonstraram bastante afinco. Obtiveram percepções interessantes sobre as dificuldades de medição, como os seguintes trechos do áudio do grupo podem comprovar.

Para fazer as medições o grupo escolheu a maior régua, começou medindo a diagonal e verificou que esta não cabe exatamente. Completam dizendo:

00:50- Aluna A: _ A diagonal seria duas vezes?
01:05- Aluna B: _Duas e em pedacinho.

Possivelmente nenhuma das peças, por menor que fosse não representava com exatidão à medida que o grupo buscava. E a divisão em frações não parecia clara.

Ao observarem que a maior régua não atende às suas necessidades, os licenciandos passaram a discutir sobre qual seria a melhor peça para identificar a unidade escolhida. A discussão girou em torno de medir os lados e a diagonal do quadrado e assim escolher a peça que mais facilite o processo por completo, simplificando os possíveis cálculos.

02:10- Aluna B: _Duas verdes e duas vezes a natural.
Aluna A: _Se a gente encontrasse um tamanho.
Aluna C: _Mas ai ela vai passar...
06:37- Aluna B: _Tem certeza que podemos usar todos?
07:49- Aluna C: _Mas de qualquer forma vai entrar fração.
08:38- Aluna A: _De qualquer forma vamos usar fração
Aluna C: _Se menor usaremos multiplicação.

Nesta busca por uma melhor unidade e na dificuldade em encontrá-la, é possível identificar que o grupo também procurou se distanciar das frações. Esta impossibilidade de encontrar uma unidade que medisse simultaneamente o lado e a diagonal criou um impacto, expresso pelo silencio de quase 7 minutos. Para sair do impasse, o grupo mudou de estratégia de medição em função do lado para encontrar a medida em um função da diagonal, o grupo se distraiu e deixou de acompanhar o que foi proposto na tarefa. Ao invés de utilizar a unidade de medida para calcular o comprimento da lateral do quadrado, o grupo escolheu uma unidade conveniente de acordo com a medida da diagonal.

14: 58- Aluna A: _A lateral do quadrado menor é 2/7 da unidade.
15:41- Aluna B: _Esse?
Aluna C: _Esse passou?
Aluna A: _3/7 dela?
17:133- Aluna A: _2 unidade mais 1/7
Aluna B: _Agora não sei perai...
Aluna C: _Ta sobrando...

Ao concluir as medições, mesmo que de forma imprecisa, o grupo deu início à última etapa da tarefa. Esta consistia em relatar através de um texto dissertativo informal, as etapas do processo de investigação, os conteúdos abordados e suas conclusões finais (sugestões e críticas). Apesar de terem desenvolvido diversas hipóteses durante a discussão em grupo, nem todos os momentos de dúvida foram relatados no texto.

O grupo em nenhum momento percebeu que se tratava de uma situação em que não era possível encontrar uma unidade comum, embora tenham percebido que não era exato e isto pode ser verificado no uso das frações para expressar esta ideia.

G1- Texto final

1ª observação: Utilizando a peça preta, na diagonal do quadrado menor é exatamente o tamanho da peça preta, unidade.

2ª observação: Com esta peça, houve um padrão em que a diagonal do segundo quadrado é exatamente 2 vezes a peça preta que é 1 e o terceiro quadrado possui diagonal três vezes a peça preta.

Lateral do quadrado menos é 5/7 da unidade.

A lateral do segundo quadrado é 1 unidade mais 3/7 da unidade.

A lateral do quadrado maior é 2 unidades mais 1/7 da unidade.

Usamos como unidade a peça preta e para medir a diagonal do quadrado menor é exatamente 1 unidade. No segundo quadrado utilizamos na diagonal 2 vezes a unidade e no quadrado maior 3 vezes a unidade. Para medir laterais, vimos que o quadrado menor corresponde a 5/7 da unidade, o quadrado médio é 1 unidade mais 3/7 da unidade, terceiro é 2 unidades mais 1/7 da unidade.

Os conteúdos usados foram: frações para medir os lados do quadrado, multiplicação para medir os lados do segundo quadrado e subtração para medir o quadrado menor.

A atividade apresentada pode ser usada pelo professor que ministra para o ensino *fundamental, recapitulando conteúdos simples como subtração, multiplicação e fração.*

De forma geral o G1 se ateve ao conceito de medição através de quantidades sólidas, ou seja, embasados pelo conceito de contagem oriundo da estrutura dos conjuntos dos naturais e racionais.

G2. Partindo da menor peça.

Também composto por 3 integrantes. Através de simples observação foi possível notar que o grupo interagiu menos do que os demais grupos. Os componentes decidiram distribuir tarefas. Enquanto um fazia teste com as peças, outro realizava cálculos algébricos e a terceira integrante ficou responsável por redigir o processo de investigação. No entanto ao acompanhar a gravação em áudio da discussão foi possível notar que, em diversos momentos, hipóteses valiosas eram consideradas.

00:30- Aluno A: _Acho que faltou... faltou não sobrou.
Aluno B: _Aqui já deu errado... faltou.
Aluno A: _Caraca, tem alguma bruxaria aqui. Tem alguma coisa errada.

Estas ideias apresentam o momento onde a medição começa a apresentar dificuldades.

Em seguida, um dos estudantes iniciou o processo do cálculo algébrico com a intenção de encontrar um resultado numérico e posteriormente representá-lo através das peças. Não obteve um resultado apurado como desejou, no entanto ampliou a discussão sobre as dificuldades de medição através de unidades.

5:36- Aluno A: _No caso a diagonal eles usavam teorema de Pitágoras. Então pode usar?

6:15- Aluno A: _Será que essa figura (minha) é a mesma que aquela?
6:40- Aluno B: _Quando não sobra falta... tenho dislexia não é possível.
7:50- Aluno A: _tá escrito aqui... Eles já usavam Pitágoras.
Aluno B: _Ai entra a parte do irracional... deu 6 raiz de 2.

8:36Aluno A: _vai dar um valor irracional esse daí...
Aluno B: _Usando Pitágoras da 6 raiz de 2.

9:08- Aluno B: _Pronto provei o irracional... ta ai.
9:30- Aluno A: _Mas eles não usavam irracional, usavam algoritmo de Euclides.
9:53- Aluno A: _O algarismo de Euclides não era o resto da divisão... então e agora?
10:55- Aluna C: _Como eu vou escrever alguma coisa que não existe?
Aluno B: _Então é aproximadamente... Escreve ai a diagonal do quadrado é

aproximadamente tanto.

A estratégia do grupo foi a de encontrar o resultado numericamente e em seguida representá-lo através das peças, no entanto, o impasse continuou o mesmo, afinal não encontravam uma forma de representar o número irracional encontrado com o uso das peças. E o problema da representação utilizando as referências unitárias continua sendo um desafio no trecho seguinte:

12:15- Aluno A: _Me dá todas as peças ai... vou tentar fazer.
12:51- Aluno B: _não pode usar irracional... coloca aproximadamente.
13:26- Aluno A: _nós não sabemos como representar. Meu problema é representar.
Aluno B: _É exatamente esse o problema.
(risos)

14:05- Aluno A: _O cara precisa ter feito Havard pra montar isso... (risos)

A partir desse momento, o aluno B iniciou a proposta de construção de alguma sentença ou equação onde a incógnita representaria a porção desconhecida da medida do lado doquadrado:

14:35 Aluno B: Mais 5 menos 10... mais 5 menos quatro....dá um número real...tipo 15
menos 6. Dá 9 até aqui?
Aluno A: _Você ta fazendo o lado... nós temos o lado. O problema é a diagonal. (risos) 16:19- Aluno A: _Encontramos 6 raiz de 2 então temos que encontrar o que pode
representar isso.
18:00- Aluno B: _Deu 16 unidades (com as peças)... mas por Pitágoras dá 12 raiz de 2.
21:12-. Aluno B: _Podíamos dizer que o que sobra ou falta e chamar de x.
21:32-Aluna C: _Nem dá pra resolver...
22:25-Aluno B: _Coloca nos comentários assim... buguei. (risos)
23:08-Aluno A: _Aqui bateu certinho.
Aluno B: _Como pode bater certinho cara? Não pode... tem que dar 12 raiz de 2. Aquideu ruim. Aqui bugou!

Foi possível notar que a discussão sobre a comparação do resultado encontrado com a medida das peças (16 unidades) e o resultado numérico irracional ($12\sqrt{2}$ =16, 9705627484...) causaram grande desequilíbrio entre as concepções e certezas do grupo. Este desequilíbrio
entre a comparação da medida com o resultado encontrado por caminhos algébricos se deu, provavelmente, pela poucas oportunidades anteriores (educação básica) de comparação entre imagens conceituais dos números irracionais. Os estudantes conhecem o resultado irracional e verificaram a medida através dos recursos, no

entanto não relacionam os dois resultados como aproximadamente equivalentes.

A partir desse momento, a Aluna C iniciou a produção do texto final relatando o processo da investigação. No entanto, os outros dois componentes continuaram a explorar outras possibilidades:

25:23- Aluno A: _Vou usar como unidade a diagonal do cubinho. É uma idéia... se vai dar certo....

26:06- Aluno B: _Falta pouca coisa. alguns centímetros de diferença.

26:31 -Aluno A: _Aqui deu 11. (raiz de 2)

Aluno B: _Mas é 12!

27:56- Aluno A: _Eu medi daqui até aqui. Deu 8 unidades e mais um pedacinho que euchamei de x. b é 8 mais x.

Ai eu medi daqui até aqui, deu 11.

Ai medi daqui até aqui, deu 2 unidades e mais um pedacinho. Eu chamei de y. Ai euvou chamar de b'.

Ai eu sei que b' é 11.

Beleza! X +y=1. Igual a uma unidade...

Nesse ponto do áudio, o grupo é interrompido pela conclusão de outro grupo e a faltade tempo não permitiu que esta construção se prorrogasse.

Apesar da riqueza de detalhes e propostas desenvolvidas durante a discussão, o grupo deixou de registrar tudo que consideraram equivocado.

G2- Texto Final

Primeiramente escolhemos a peça que seria tomada como unidade, para tal o menoscubo foi escolhido.

Notamos que o menos quadrado tinha lado 6, que também poderia ser representado pelapeça verde.

O quadrado médio tem lado 9, que pode ser representado pela peça azul.

O quadrado maior tem lado 12 e pode ser representado pelas peças azul e verde clara secolocadas juntas.

Foi utilizado o conhecimento dos números racionais, geometria, algoritmo de Euclides.

A atividade é instigante e nos leva a refletir sobre o surgimento do conjunto dos irracionais e como era possível realizar os cálculos sem esse conteúdo.

Uma sugestão seria uma instrução mais explicada, por conta da complexidade da atividade.

O grupo dois utiliza de estratégias mais articuladas com a realidade histórica do conceito de irracionalidade/incomensurabilidade, pois utilizaram percursos aritméticos e algébricos na tentativa de representar a raiz de 2 com números pertencentes ao conjunto de números racionais.

Os grupos 3 e 4 não conseguiram enviar os áudios das discussões desta tarefa, apresentando tão somente seu texto final e alguns registros aleatórios. As considerações serão feitas a partir deste material.

G3- Utilizando unidades diferentes

Ao analisar os registros escritos do grupo, é possível perceber que usaram aproximações muito distantes das medições reais. Ao calcular a diagonal do quadrado de unidade 1 informaram o valor 1+2/3, que em representação decimal é 1, 6666666666667.

No entanto é possível notar que seus resultados não apresentavam certeza ao observar uma das respostas incluídas no roteiro:

Foi possível encontrar um valor exato? Quais foram as dificuldades?

Sim. A maior dificuldade foi medir a sobra das medidas.

Possivelmente, ao se defrontar com "sobras" difíceis de serem calculadas, o grupo optou por uma aproximação menos precisa que os demais.

G3- Texto final

1º com a escala Cuisenaire utilizamos a medida verde escuro e verde clara, para complementar no quadrado da última página.

Com as réguas utilizamos a régua azul para medir todos os quadrados da 3ª folha.

2º o conteúdo matemático utilizado foi números inteiros e frações. Não foi mencionada a utilização de números racionais, o que reforça a busca por resultados construídos com o uso de unidades.

3° concordamos que é um tipo de exercício fácil, de ser aplicado, de fácil entendimento.

G4- Procurando unidades.

Assim como o G3. Ao calcular a medida dos lados e das diagonais dos quadrados, o grupo chegou a apresentar resultados compostos por números naturais: Lado igual a 5 unidades e diagonal igual a 7 unidades.

No entanto, assim como o G3, ao responder ao mesmo questionamento sobre as dificuldades em realizar medições exatas a resposta do grupo foi:

Foi possível em alguns lados, pois com as peças propostas em sala não conseguimos preencher a diagonal de forma completa.

Sendo assim, ficou mais claro compreender as respostas encontradas. O grupo seconformou com os resultados obtidos com a soma das peças e não arriscou nenhuma outra estratégia para compor frações da unidade escolhida.

G4- Texto final

Denominamos a peça branca como referencia, ou seja, ela equivale a uma unidade.

Fizemos as medições e obtemos valores exatos e também não exatos.

Utilizamos da matemática para resolver essa questão o Teorema de Pitágoras, comprimento e medidas.

A iniciativa foi ótima, é interessante trabalhar dessa forma. Porém o material nos deixoucom dúvidas em relação às medidas.

Apesar de apresentarem o teorema de Pitágoras como uma das estratégias, o grupo nãoapresentou uma comparação entre o resultado deste cálculo e suas medições.

Tanto o G3 quanto o G4 apresentaram estratégias mais conformistas, possivelmenteinfluenciadas pela pouca experiência com atividades de investigação.

G5- Unidade mais conveniente

O grupo apresentou certa descontração e afinidade, no entanto em muitos momentos demonstraram dificuldades para realização das tarefas por falta de concentração e desvio da proposta.

No primeiro momento o grupo se ateve em procurar uma peça que representasse uma unidade mais conveniente, ou seja, que facilitasse todo o processo da tarefa, diminuindo a quantidade de cálculos.

00:23- Aluno A: _Todos os lados do quadrado e depois todas as diagonais.
00:30- Aluno B: _Vamos medir o lado depois as diagonais. Você pode usar mais de um.
Amarelo e roxo.
01:15- Aluno A: _A diagonal não é exatamente a preta.
Aluna B: _Se usa a amarela como unidade a preta é igual a 2 amarelas
Aluna C: _Usamos a amarela e agora vai ficar difícil.
Aluno B:_ O problema não é medir esse troço, o problema é como vamos chamar.
Aluno A: _Essa aqui então é 1 mais 1/3.
Aluno B: _De qualquer maneira vamos ter que fazer conta.

Apesar de toda a relutância para dar início ao processo de cálculo das diagonais, no momento em que iniciaram as tentativas já é possível perceber que o contexto de incomensurabilidade, ou seja, impossibilidade de medir uma grandeza irracional através de unidades e suas frações começa a surgir.

11:15- Aluno B: _Esse aqui é 1 mais 1/3. Não nos mínimos detalhes, estamoscolocando assim, grossamente.
11:29- Aluno A: _é 1 e mais 1/3.

12:30- Aluno B: _É 1 + 1/3 não nos mínimos detalhes... assim "grossamente".23:23-

Aluno C: _Foi possível encontrar um valor exato?
Aluno A: _Claro que não.
Aluno B: _Claro que foi!
Aluno A: _Vocês estão metendo um monte de frações... Então foram valores aproximados...
Aluno B: _Então encontramos valores aproximados em relação à unidade escolhida.

Essa aproximação condiz com o raciocínio necessário para o entendimento do conceito de irracionalidade, pois se o grupo não conseguiu emitir uma comparação com nenhuma fração específica ou representação decimal abre a oportunidade para questionamentos sobre outra possível representação.

G5- Texto Final

Escolhemos a peça amarela de Cuisenaire como unidade de medida e a sobrepomos na folha, assim verificamos que em determinadas figuras usaríamos vários da unidade que escolhemos.
Frações, números decimais, inteiros menores ou maiores.
Sugestão: Precisaria de um tempo maior para a realização da atividade.
Gostamos demais da atividade, a atividade introduz os conteúdos de forma lúdica, auxiliando a aula e o professor e o aluno a assimilar o conteúdo facilmente.

Apesar da pouca certeza, e do fato de considerarem as frações como medida inexata foi possível notar que o G5 entra em conflito no momento de expressar as medidas das diagonais, dessa forma a problematização sobre incomensurabilidade foi percebida, mesmo que de forma não declarada.

Tabela 15- Resumo das estratégias e conclusões

GRUPO	ESTRATÉGIA	CONCLUSÃO

1	Usar a maior peça como unidade e medir inicialmente a diagonal.	O grupo imaginou que ao iniciar a resolução pela medição da diagonal teriam a resposta do problema deforma rápida, afinal o questionamento envolvia tal medida. No entanto o paradigma da medição através de unidade (incomensurabilidade) permaneceu.
2	Usar a menor peça como unidade e encontrar relação lado x diagonal.	Conceito de contagem (números naturais) ressaltado através da estratégia pretendida. Iniciar da menor peça pode indicar uma tendência à quantificação (quantos?)
3	Utilizar peças quaisquer e representar através de frações.	Utilização de frações sem aproximação refletindo a não percepção do conceito de irracionalidade da diagonal do quadrado.
4	Utilizar peça maior e representar através de números naturais.	Novamente, o Conceito de contagem (números naturais) ressaltado através da estratégia pretendida. Iniciar da menor peça pode indicar uma tendência à quantificação (quantos?).
5	Utilizar peça que mais se aproxima da medida do lado e realizar adição entre naturais e racionais.	Operacionalização do conceito de número misto (natural mais racional) sem apropriação de que o mesmo também representa um número racional.

De forma geral, foi possível perceber que a relação entre medida e contagem surge como referência na maioria das estratégias, ou seja, os licenciandos trabalham o conceito de medida (quanto mede?) atrelado aos de número natural (quantos?) e ao se depararem com o desafio de transcender essa percepção, vão ao encontro do que chamaram de “complexidade”.