



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



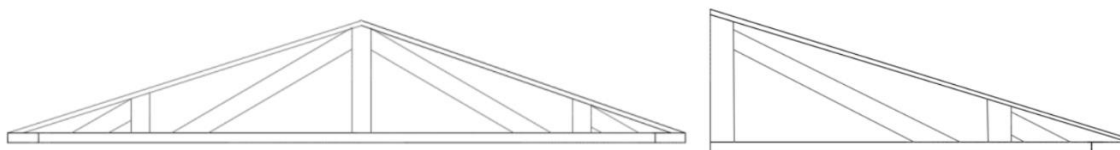
Tarefa 2 - Tesoura

Conteúdo: Cálculo de área de polígonos regulares

Fonte: SOUZA, C. F. de. CALDART, V. L. S. **Planejamento das atividades do estágio de regência.** Universidade Estadual do Paraná – Campus União da Vitória. 2019.

TAREFA 2 - TESOURA

- 1) Na engenharia civil, uma tesoura é um tipo de estrutura em treliça, biapoiada, triangular, comumente utilizada como apoio de telhados e é normalmente construída em madeira, assim como nas figuras abaixo:



Seu Rogério decidiu pintar parte da parede externa da sua residência, cuja área corresponde à área ocupada pela tesoura. Sabendo que a tesoura possui a medida da base de 7m e altura de 2m, Seu Rogério transcreveu essa representação para uma malha quadriculada, respeitando a escala de 1m real equivalente a 1 cm.

- Encontre uma relação entre a área do retângulo e a área do triângulo formado pela tesoura. Se necessário faça a representação de um retângulo e encontre uma forma de relacionar a sobreposição das figuras.
- Expresse em linguagem matemática uma forma geral de calcular a área do triângulo.

PLANO DE AULA

Duração:

- 2h/aula

Conteúdo:

- Cálculo de área de polígonos regulares

Ano de escolaridade:

- 8º ano do Ensino Fundamental



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Objetivos:

- Compreender o processo de dedução das fórmulas dos polígonos regulares;
- Compreender o algoritmo para o cálculo de área de polígonos regulares;
- Diferenciar a nomenclatura dos polígonos, em função do seu número de lados e de ângulos internos.

Recursos:

Visando os objetivos indicados utilizaremos como materiais para o auxílio da resolução da tarefa, folhas de malha quadriculada, utilizadas para o desenho das projeções dos polígonos, bem como os itens necessários para a representação do mesmo (régua, lápis, transferidor, etc.).

Além da utilização do quadro negro para passar alguns exercícios e fazer a sistematização das aprendizagens dos alunos, eles usarão o quadro para comunicar suas resoluções para os colegas. Vale ressaltar que todas as tarefas serão entregues aos alunos a fim de que eles as resolvam nessa mesma folha, compondo o nosso material de avaliação.

Metodologia

Para a realização do estágio, definimos que serão utilizadas duas perspectivas metodológicas, o ensino exploratório e as aulas expositivas dialogadas. A composição de ambos se dá primeiramente no desenvolvimento dos conteúdos específicos definidos, donde utilizaremos tarefas exploratórias para a assimilação do saber matemático emergir das hipóteses desenvolvidas pelos alunos.

Das aulas expositivas, usaremos as listas de exercício, cujas questões terão nível de dificuldade gradual, visando aplicar em contextos definidos o saber matemático resultante das tarefas utilizadas. Das aulas expositivas dialogadas, pautados nas ideias de Libâneo (1994), o professor parte das experiências dos alunos em relação ao conteúdo em estudo, de forma que os conteúdos apresentados durante a aula fomentem o conflito entre o saber existente do aluno e o conhecimento almejado.

Quanto ao ensino exploratório, Canavarro (2011, p. 11) diz que “os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias Matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva”.

Segundo Canavarro; Oliveira e Menezes (2012) uma aula de ensino exploratório é geralmente dividida em quatro etapas, que são: proposição da tarefa, exploração da tarefa, discussão coletiva e sistematização dos conteúdos emergidos.



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



A proposição da tarefa é a fase em que “o professor apresenta uma tarefa matemática à turma, a qual pode ser um problema ou investigação, exigindo interpretação por parte dos alunos. É papel do professor assegurar que os alunos entendam o que se espera que façam e que se sintam desafiados a trabalhar na tarefa” (CANAVARRO; OLIVEIRA; MENEZES, 2012).

Durante a fase de exploração da tarefa “os alunos realizam a tarefa em duplas ou pequenos grupos e o professor deve garantir o desenvolvimento da mesma, contudo, tomando cuidado para não comprometer a autonomia dos alunos e sem diminuir a demanda cognitiva da tarefa” (CANAVARRO; OLIVEIRA; MENEZES, 2012; CYRINO; OLIVEIRA, 2016). Vale ressaltar que durante esta fase, o professor deve realizar anotações de pontos interessantes apresentados pelos alunos, visando à fase de discussão coletiva.

Na discussão coletiva o professor “(...) tem de orquestrar a discussão, não apenas gerindo as intervenções e interações dos diferentes alunos, mas também promovendo a qualidade matemática das suas explicações e argumentações” (CANAVARRO; OLIVEIRA; MENEZES, 2012, p. 257). Nessa etapa é fundamental que o professor propicie um ambiente favorável à discussão entre o que fora desenvolvido e apresentado pelos alunos e o restante da turma.

Em decorrência das discussões coletivas, o professor então inicia a sistematização do conteúdo, que é a fase “mais centrada no professor, uma vez que ele vai formalizar os conteúdos e ideias que derivaram das resoluções da tarefa. Nessa fase podem surgir novos conceitos ou serem revistos e sintetizados outros conceitos e procedimentos já conhecidos pelos alunos, além de se estabelecer conexões entre o conteúdo abordado pela tarefa e outros tópicos e conteúdos matemáticos” (CYRINO; OLIVEIRA, 2016).

DESENVOLVIMENTO

Iniciaremos a aula solicitando aos alunos que formem novamente grupos de no máximo três alunos. Iremos propor então a Tarefa 2 - Tesoura, distribuindo cópias para os grupos juntamente com uma folha de malha quadriculada. Então um professor irá solicitar que algum aluno leia a tarefa a fim de esclarecer dúvidas quanto ao enunciado e a problemática.

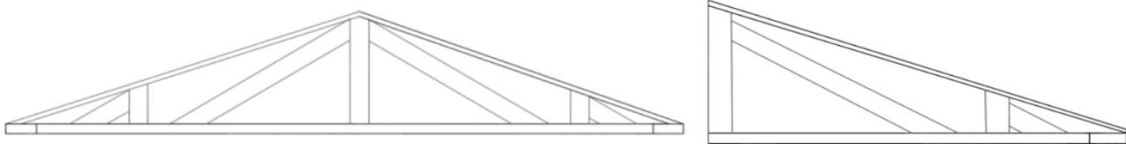
Resolução da Tarefa 2 - Tesoura



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq

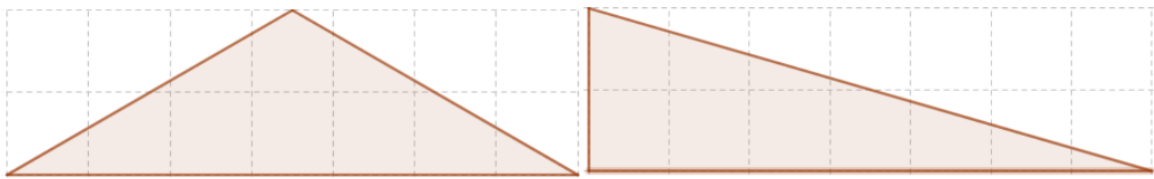


- 1) Na engenharia civil, uma tesoura é um tipo de estrutura em treliça, biapoiada, triangular, comumente utilizada como apoio de telhados e é normalmente construída em madeira, assim como nas figuras abaixo:



Seu Rogério decidiu pintar parte da parede externa da sua residência, cuja área corresponde à área ocupada pela tesoura. Sabendo que a tesoura possui a medida da base de 7m e altura de 2m, Seu Rogério transcreveu essa representação para uma malha quadriculada, respeitando a escala de 1m real equivalente a 1 cm.

Iremos utilizar o quadro negro e projetar os dois tipos de tesoura mais comuns na construção civil, uma sendo um triângulo isósceles (casas de duas águas) e a outra um triângulo retângulo (casas de uma água).



- a) Encontre uma relação entre a área do retângulo e a área do triângulo formado pela tesoura. Se necessário faça a representação de um retângulo e encontre uma forma de relacionar a sobreposição das figuras.

R: Espera-se que nesta questão os alunos associem que é possível projetar dois segmentos paralelos partindo das extremidades da base do triângulo com a altura máxima dada, permitindo a projeção de outro segmento paralelo a base, assim sendo possível visualizar que o triângulo estará inscrito dentro de um retângulo. Dessa construção é possível notar que o triângulo, se isósceles, terá um ponto da extremidade do segmento que representa a altura coincidente com o ponto médio da base, o que permitirá a decomposição para representação de dois triângulos retângulos, que novamente associados à inscrição da imagem nos respectivos retângulos, apresentará apenas a metade da área total do retângulo. Caso a construção se dê pela tesoura com estrutura de triângulo retângulo, o processo será análogo do passo que sucede a divisão do triângulo isósceles.

- b) Expresse em linguagem matemática uma forma geral de calcular a área do triângulo.



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



R: Espera-se que os alunos definam um Retângulo de base b e altura h , com a inscrição de um Triângulo Isósceles de mesma base e altura, para que a dedução da área seja descrita matematicamente como:

$$A_{tri} = A_{ret} - A_{fig} \quad (I)$$

onde A_{fig} é obtida pela divisão do triângulo isósceles e proposição de que no novo retângulo cuja base é a metade da original, a área preenchida equivale à metade da área total limitada por esta figura, assim

$$A_{fig} = \frac{A_{ret}}{4}$$

como a decomposição origina dois triângulos retângulos, podemos então reorganizar de forma que

$$2A_{fig} = \frac{2A_{ret}}{4} = \frac{A_{ret}}{2}$$

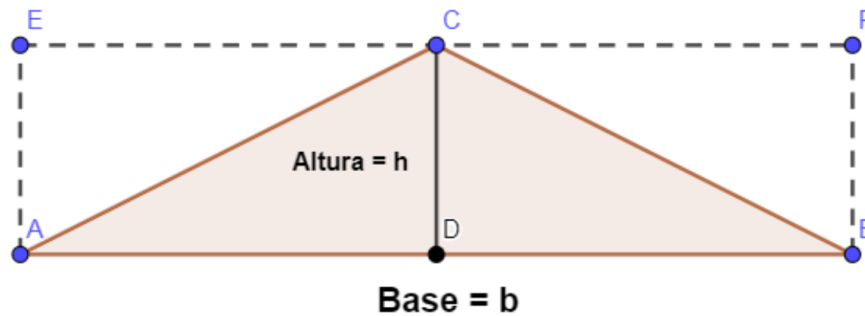
Assim substituindo em (I),

$$A_{tri} = A_{ret} - \frac{A_{ret}}{2} = \frac{A_{ret}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Obtendo que a área do triângulo pode ser escrita como a metade da área do retângulo.

Após isso dará início a fase de exploração da tarefa, onde novamente os professores estarão disponíveis para auxiliar os alunos no desenvolvimento de seus raciocínios. Bem como coletando dados pertinentes a serem utilizados na discussão coletiva.

A Tarefa Tesouras traz a problemática do cálculo de área do triângulo. Para isso ela associa o conceito da construção civil, do que é uma tesoura com a necessidade de cobrir com tinta uma região. Nesta tarefa os alunos poderão definir com qual modelo de tesoura projetado no quadro negro eles têm interesse em trabalhar (triângulo isósceles ou triângulo retângulo). A ideia é que eles notem que é possível projetar um retângulo de forma que o triângulo esteja inscrito dentro do mesmo, de tal forma:



Fonte: Os autores, 2019.

Assim se escolherem a tesoura formada pelo triângulo isósceles, terá um triângulo inscrito em um retângulo cuja base é a mesma para o triângulo, bem como do vértice oposto a base é possível traçar uma paralela e das extremidades das paralelas, outros dois segmentos, ligando as extremidades opostas da base com o segmento paralelo a ela. Disso a altura do triângulo será a altura do retângulo e do triângulo serão as mesmas, por construção. O triângulo inscrito no retângulo é isósceles, então por definição o segmento da altura coincide com o ponto médio da base, dividindo o triângulo em dois triângulos retângulos. A partir deste ponto os alunos que escolheram a tesoura para casas de uma água (triângulo retângulo) ou duas (triângulo isósceles) seguirão o mesmo caminho lógico. Eles deverão notar que a área preenchida pelo triângulo vale a metade da área do retângulo, assim deduzindo que a área do triângulo pode ser obtida dividindo a área do retângulo ao meio. Aos que escolheram a tesoura da casa de duas águas, devem retornar ao cálculo, considerando que cada triângulo retângulo tem área equivalente a um quarto da área do retângulo original.

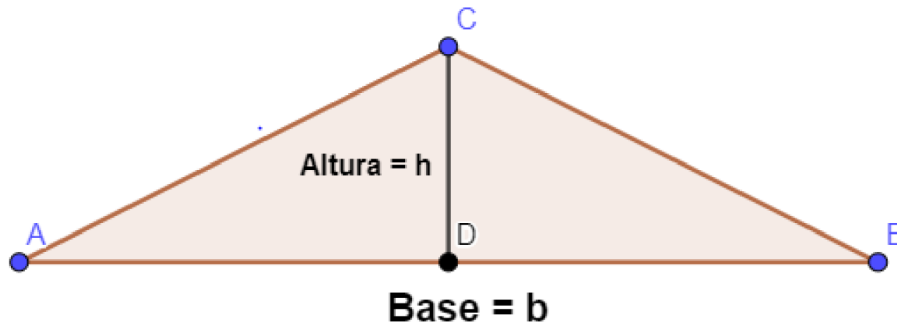
Após a etapa de resolução da tarefa, onde iremos selecionar grupos que tenham chegado à forma de calcular a área do triângulo partindo das duas possíveis construções de tesouras.

Sistematização

Após isso daremos início à sistematização, no quadro negro será escolhido junto com a turma uma das representações de tesoura da qual iniciaremos a dedução da fórmula para o cálculo da área do retângulo.

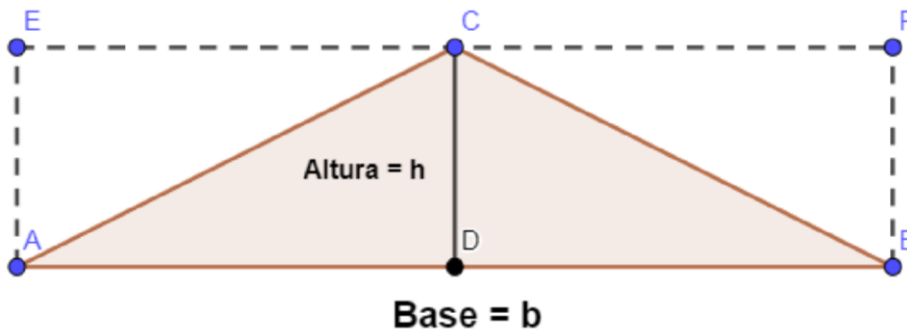
Se escolhido a tesoura da casa de duas águas (triângulo isósceles)

Definiremos primeiro um triângulo ABC isósceles, cujas medidas da base e da altura, são respectivamente, b e h . Obtendo:



Fonte: Os autores, 2019.

Iremos estender um segmento AE e outro BF , ambos com comprimento igual à altura h . Após isso traçaremos um segmento EF . Assim obtendo:



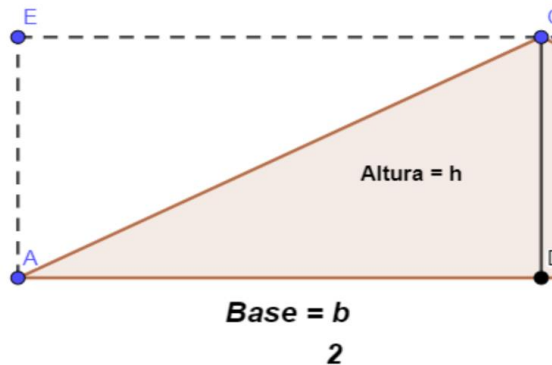
Fonte: Os autores, 2019.

O triângulo isósceles está agora inscrito em um retângulo AEFB. Contudo o segmento que delimita a altura, neste caso também coincide com o ponto médio da base além de formar um ângulo reto com a mesma. Isso permite a divisão da figura em outros dois triângulos retângulos inscritos em dois retângulos. Temos o triângulo ADC inscrito no retângulo AECD e o triângulo BDC inscrito no retângulo DCFB.

Para a dedução da fórmula, iremos primeiro considerar que a área do triângulo ABC pode ser reescrita como a soma das áreas dos triângulos ADC com BDC. Mas por construção sabemos que esses triângulos são congruentes, então podemos calcular essa área da seguinte forma:

$$A_{ABC} = 2 \cdot ADC \quad (I)$$

Tomando o triângulo ADC em relação à figura construída, iremos primeiro deduzir a área reescrevendo a parcela das medidas do retângulo AECD que compõem AEFB. Teremos então:



Fonte: Os autores, 2019.

Disso podemos ver que o retângulo AECD foi dividido em dois triângulos retângulos congruentes. Podemos então escrever a área do retângulo como:

$$A_{AECD} = A_{ADC} + A_{CEA} \quad (II)$$

Como por construção $AE = DC$ e $AD = EC$ e AC é comum aos dois triângulos, temos uma relação de congruência. Assim quanto às áreas desses triângulos, podemos afirmar (segundo o conceito III apresentado na aula passada), que:

$$A_{ADC} = A_{CEA} = 2 \cdot A_{ADC}$$

Podemos substituir em (II), chegando em:

$$A_{AECD} = 2 \cdot A_{ADC}$$

$$A_{ADC} = \frac{A_{AECD}}{2}$$

$$A_{ADC} = \frac{b \cdot h}{2} \quad (III)$$

Neste ponto iremos ressaltar que quem escolheu a tesoura com formato de triângulo retângulo terá deduzido a fórmula para o cálculo da área do triângulo. Continuaremos com a dedução, mostrando que essa mesma fórmula vale para o triângulo ABC. Para isso basta calcularmos a área de ADC utilizando a fórmula encontrada em (III), utilizando os valores definidos para a base e a altura, respectivamente, $\frac{b}{2}$ e h . Assim temos que:

$$\begin{aligned} A_{ADC} &= \frac{\frac{b}{2} \cdot h}{2} = \\ &= \frac{b \cdot h}{4} \end{aligned}$$

Voltando a (I) que havíamos definido, temos então que:



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



$$\begin{aligned}A_{ABC} &= 2 \cdot ADC \\ &= 2 \cdot \frac{b \cdot h}{4} \\ &= \frac{b \cdot h}{2}\end{aligned}$$

Mostrando que a área do triângulo ABC também possui mesmo algoritmo para ser calculado. Aqui expressaremos que qualquer triângulo terá a mesma fórmula para o cálculo de sua área, ressaltaremos isso, pois a tarefa traz um triângulo retângulo e um triângulo isósceles, essa constatação não descartará os triângulos equiláteros e os triângulos escalenos quaisquer da forma de obter sua área.

Encerraremos a sistematização escrevendo no quadro negro uma definição de como obter a área do triângulo e associaremos com a fórmula deduzida com a tarefa, utilizaremos como base a definição de Barbosa (2012, p.147):

- A área de um triângulo é a metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados, pela altura relativa a este lado.

$$A_{tri} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Após isso, iremos solicitar que os alunos entreguem as tarefas resolvidas em durante a aula.

Referências

- BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro. Editora SBM. 2012.
- CANAVARRO, A.; OLIVEIRA H.; MENEZES, L.; Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In: Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática, 2012. Castelo de Vide. *Actas...* Porto Alegre: SPIEM, 2012, p. 255-266.
- CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. M.; Ensino Exploratório e casos multimídia na formação de professores que ensinam matemática. In: CYRINO, M. C. C. T. (Org). *Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática*. Londrina: Eduel, 2016.
- LIBÂNEO, J. C. *Didática*. São Paulo. Editora Cortez. 1994.