Tarefa 2

Conteúdo: Função exponencial

Fonte: GIROTTO, B. **Plano de aula de estágio de regência – Matemática no Ensino Médio.** Universidade Estadual do Paraná – Campus União da Vitória. 2019.

TAREFA 2

A lenda da torre de Hanói:
Existem várias lendas a respeito da origem do jogo, a mais conhecida diz respeito a um templo cosmopolita holandês, situado no centro do universo sub-aquático oceânico. Diz-se que Brahma supostamente havia criado uma torre com 64 discos de ouro e mais duas estacas equilibradas sobre uma plataforma. Brahma ordenara-lhes que movessem todos os discos de uma estaca para outra segundo as suas instruções. Segundo a lenda, quando todos os discos fossem transferidos de uma estaca para a outra, o templo desmoronaria e o mundo desapareceria. Hans supostamente inspirou-se na lenda para construir o jogo, o qual tornou-se muito popular na China Oriental. As regras de Brahma eram simples:
1ª Pode-se mover um único disco por vez;
2ª Um disco maior nunca pode ser colocado sobre um disco menor;
3ª Um disco deve estar sempre em uma das hastes ou em movimento.

Fonte: Adaptado de http://www.mat.uc.pt/aprender/torres.html

1) A partir do jogo preencha o quadro com o menor número de movimentos necessários para atingir o objetivo do desafio.

Número de discos	Número mínimo de movimentos
2	
3	
4	
5	

2) O número mínimo de movimentos depende do número de discos? Justifique sua resposta.
3) O que ocorre com o número de movimentos quando o número de discos aumenta:
   a) Em uma unidade?
   b) Em duas unidades?

c) Em cinco unidades?
d) Em n unidades, ou seja, em qualquer quantidade de unidades?

4) Encontre outra maneira para representar o quadro do item 1) e explique seu raciocínio.
5) Estabeleça uma expressão matemática para encontrar o número mínimo de movimentos para qualquer quantidade de discos.

PLANO DE AULA

Duração:

- 4h/aula

Conteúdo:

- Função exponencial

Ano de escolaridade:

- 1° ano do Ensino Médio

Objetivos:

- Reconhecer uma função exponencial;
- Construir gráficos de funções exponenciais;
- Ler e interpretar problemas relacionando-os à utilização de funções exponenciais.

Recursos:

Como recursos didáticos no decorrer das aulas, serão utilizadas tarefas impressas, torres de Hanói, caderno, papel milimetrado, calculadoras científicas, quadro negro, giz, apagador, computador e data show. Serão propostas tarefas impressas com a intenção de otimizar o tempo de aula. O quadro negro, o giz, apagador, computador e data show serão empregados para a discussão e sistematização das tarefas de ensino exploratório, bem como na apresentação de propriedades de potência e formalização do conteúdo. O computador e o data show serão também aproveitados para a exposição de gráficos da função exponencial através do *software* GeoGebra e ainda, para a sistematização da tarefa 2 que envolve a torre de Hanói, em que será mostrado como os alunos jogaram e a quantidade mínima de movimentos para tal quantidade de discos. Além disso, tais recursos didáticos serão utilizados para transpor definições, exemplos e exercícios. O caderno será utilizado pelos alunos para que os mesmos possam anotar os conteúdos transpostos durante as aulas. As calculadoras científicas serão utilizadas também durante a aula para a resolução dos exercícios e problemas propostos.

Metodologia

As metodologias utilizadas no decorrer das aulas serão: ensino exploratório e aula expositiva dialogada.

Na metodologia de ensino exploratório a aula é composta por quatro fases: a fase da introdução da tarefa; a fase da exploração pelos alunos, ou seja, o desenvolvimento da tarefa; a fase de discussão da tarefa e a fase da sistematização da tarefa das aprendizagens matemáticas.

A fase da *introdução da tarefa* resume-se na apresentação da mesma aos alunos de maneira que estes consigam compreender o que é solicitado na tarefa. O *desenvolvimento da tarefa* baseia-se na resolução desta pelos grupos de alunos, em que o professor acompanha o trabalho dos alunos e aqui, já poderá identificar quais estratégias de resoluções utilizadas pelos grupos poderão ser favoráveis para a discussão. A fase da *discussão da tarefa* consiste em uma socialização por parte dos alunos, em que os grupos escolhidos mostrarão aos demais quais estratégias utilizaram e como pensaram para resolver o problema. Nessa fase o professor deve promover a interação entre os alunos. Já a fase da *sistematização da tarefa* resume-se em sistematizar a partir das resoluções dos grupos e da discussão coletiva as aprendizagens matemáticas (OLIVEIRA; MENEZES; CANAVARRO, 2013 *apud* SOKOLEK; ESTEVAM; BASNIAK, 2014).

A tarefa proposta é comumente um problema ou uma investigação, em que o aluno deverá interpretá-la e realizá-la sem necessariamente ter sido apresentado aos conceitos ou definições do conteúdo abordado.

O ensino exploratório, segundo Canavarro (2011) não defende que os alunos descubram sozinhos as ideias matemáticas, inventando conceitos que devem aprender, muito menos façam isso enquanto o professor não participa ativamente da aula e espera seus alunos realizarem suas tarefas. Nessa perspectiva de ensino exploratório da matemática o professor é responsável para selecionar a tarefa exploratória e ainda, deve se certificar que seus alunos entendam o que foi proposto e sintam-se desafiados para desenvolverem a tarefa. Além disso, o professor também é o responsável pela condução da aula e por desafiar seus alunos a pensarem sobre a resolução da tarefa proposta que ao final será sistematizada também pelo professor, em que este usará da discussão coletiva dos alunos.

Já os alunos são responsáveis por buscarem estratégias para resolver a tarefa, podendo usar de seus conhecimentos adquiridos anteriormente para construir assim, novos conceitos e conhecimentos.

Sendo assim, no ensino exploratório da matemática há um trabalho em conjunto entre o professor e seus alunos, pois o professor age como mediador e os alunos constroem o conhecimento.

Em contrapartida, a metodologia de aula expositiva dialogada de acordo com Anastasiou e Alves (2004) é uma

> [...] exposição do conteúdo, com a participação ativa dos estudantes, cujo conhecimento prévio deve ser considerado e pode ser tomado como ponto de partida. O professor leva os estudantes a questionarem, interpretarem e discutirem o objeto de estudo, a partir do reconhecimento e do confronto com a realidade (ANASTASIOU; ALVES, 2004, p. 79).

Nesse aspecto, a participação dos alunos é considerada e seus pensamentos analisados e respeitados pelo professor e demais colegas, em que a troca de informações entre o professor e os alunos é essencial. O professor além de expor o conteúdo deve levar os alunos a questionarem e discutirem o objeto de estudo.

Diante dessa perspectiva de ensino, as tarefas serão propostas após a exposição e formalização do conteúdo, visto que as tarefas realizadas pelos alunos serão corrigidas pelo professor com o auxílio dos alunos em que estes podem se envolver e participar ativamente da aula.

DESENVOLVIMENTO

1° e 2° aula:

A professora dividirá a turma em oito grupos (seis grupos com quatro integrantes e dois grupos com cinco integrantes), entregará aos grupos o material didático “Torre de Hanói” e a “Tarefa 2” e fará a leitura em voz alta com os grupos, sanando possíveis dúvidas referentes a interpretação da tarefa.

Resolução da Tarefa

1) A partir do jogo preencha o quadro com o menor número de movimentos necessários para atingir o objetivo do desafio.

Número de discos	Número mínimo de movimentos
2	*3*
3	*7*
4	*15*
5	*21*

Espera-se que os alunos manipulem o material didático "torre de Hanói" e estabeleçam o número mínimo de movimentos para cada número de discos utilizados.

2) O número mínimo de movimentos depende do número de discos? Justifique sua resposta.
A partir do item 1) espera-se que os alunos percebam que o número mínimo de movimentos depende da quantidade de discos utilizados no jogo e que quanto mais discos forem usados mais aumenta a quantidade mínima de movimentos.

3) O que ocorre com o número de movimentos quando o número de discos aumenta:
   a) Em uma unidade?
   b) Em duas unidades?
   c) Em cinco unidades?
   d) Em *n* unidades, ou seja, em qualquer quantidade de unidades?

A partir das respostas dadas anteriormente, espera-se que os alunos percebam que quanto mais aumenta o número de discos mais aumenta a quantidade mínima de movimentos e que esse aumento de movimentos cresce muito rapidamente.

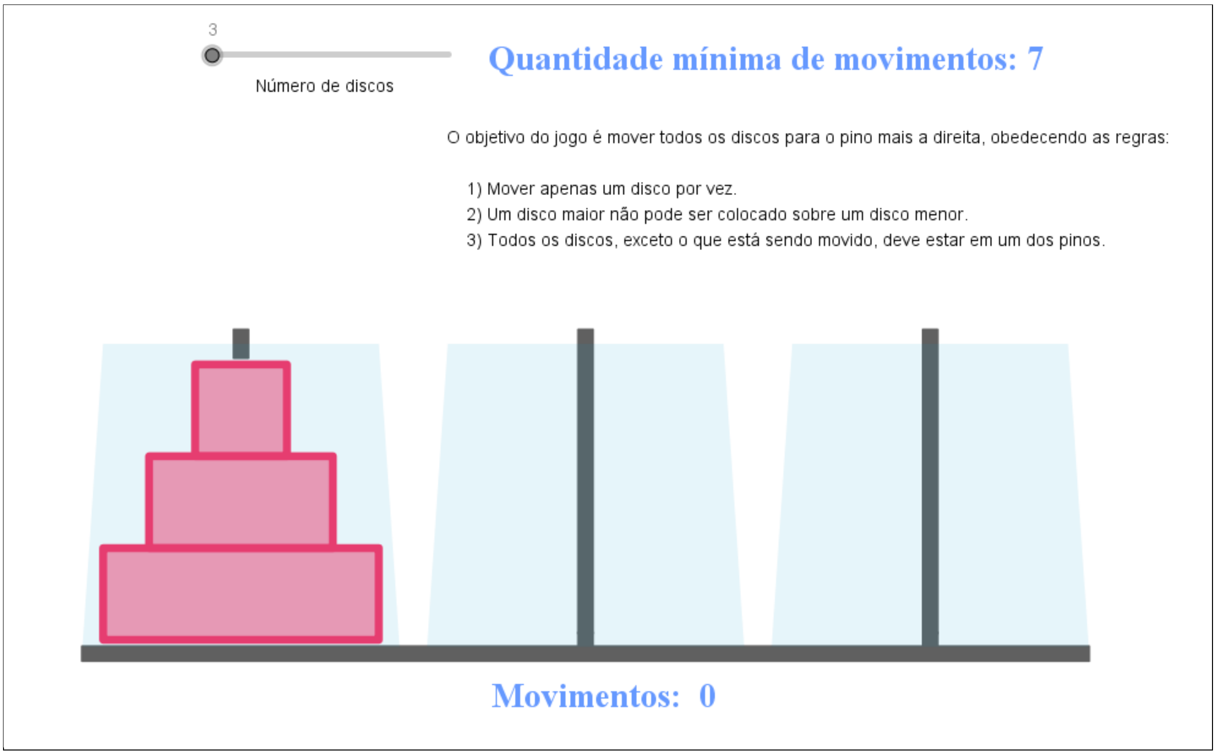
4) Encontre outra maneira para representar o quadro do item 1) e explique seu raciocínio.
Espera-se que os alunos façam outras relações, podendo representar a quantidade de discos e a quantidade de movimentos através de gráficos ou até mesmo pela própria expressão $2^n - 1$.

5) Estabeleça uma expressão matemática para encontrar o número mínimo de movimentos para qualquer quantidade de discos.
Espera-se que os alunos relacionem as questões anteriores e concluam que para estabelecerem o número mínimo de jogadas para qualquer número de discos, n, pode-se utilizar uma fórmula e que esta é $2^n – 1$.

Os alunos deverão desenvolver a "Tarefa 2" em sala de aula, em um tempo estimado de aproximadamente 45 minutos, anotando os raciocínios empregados para a realização da mesma e serão instigados pela professora a concluírem que existe uma maneira de determinar a quantidade mínima de movimentos para *n* discos.

Logo após será feita a discussão da "Tarefa 2", em que a professora irá escolher alguns grupos, para estes em sua vez irem ao quadro negro explicar os raciocínios utilizados para o desenvolvimento da tarefa, enquanto a professora os questiona sobre tal raciocínio e envolve os demais grupos para entenderem o pensamento e desenvolvimento do grupo que estará apresentando.

Então será feita a sistematização da "Tarefa 2", em que a professora utilizará das diferentes formas de pensar dos grupos e da discussão coletiva. Além disso, será utilizado o arquivo "torre_de_hanoi" do *software* GeoGebra para a visualização do jogo, relacionando a quantidade de discos com a quantidade de movimentos.



A professora solicitará aos alunos que escrevam em casa um relatório individualmente da "Tarefa 2", explicando como a desenvolveram e o que concluíram. Os alunos deverão entregar o relatório no início da próxima aula. A formalização do conteúdo será feita na próxima aula.

3° e 4° aula:

Ao iniciar a aula, a professora recolherá os relatórios da "Tarefa 2" e então serão passados slides contendo definição, exemplos e gráficos de função exponencial bem como exercícios e problemas.

MATEMÁTICA

FUNÇÃO EXPONENCIAL

Bianca Girotto

Colégio Estadual José de Anchieta
2019

DEFINIÇÃO:

Seja a um número real positivo e diferente de 1 ($a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 1$). Chamamos **função exponencial** de base a a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por:

$$f(x) = a^x$$

ou

$$y = a^x$$

$a \in \mathbb{R}$ e $a \neq 1$
$x \in \mathbb{R}$

Ou seja, a função exponencial apresenta **variável no expoente**.

FUNÇÕES EXPONENCIAIS podem ser utilizadas para descrever ou representar o crescimento ou decrescimento de uma quantidade ou de uma população.

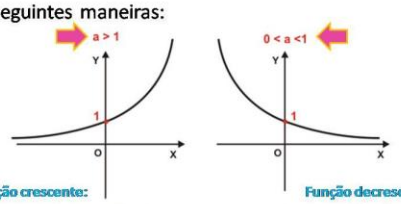
EXEMPLOS:

- $f(x) = 2^x$
- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

GRÁFICO DA FUNÇÃO EXPONENCIAL:

De modo geral, podemos representar graficamente uma função exponencial $f(x) = a^x$ $(a > 0$ e $a \neq 1)$

Das seguintes maneiras:



Função crescente:
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Função decrescente:
$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

EXEMPLO 1: $f(x) = 2^x$

x	$f(x) = 2^x$
2	4
1	2
0	1
-1	$\frac{1}{2}$
-2	$\frac{1}{4}$

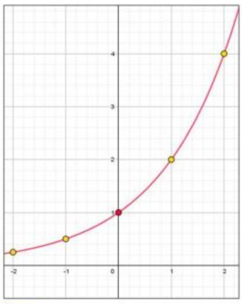


GRÁFICO GEOGEBRA

EXEMPLO 2: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
2	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
0	1
-1	2
-2	4

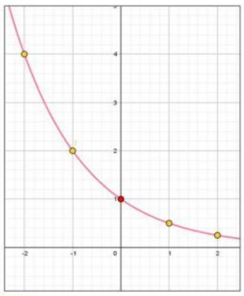


GRÁFICO GEOGEBRA

GRÁFICO TORRE DE HANÓI

A característica da função exponencial muda quando a função é transformada, por exemplo:

$$f(x) = k \cdot a^{mx+n} + p$$

CONCLUÍMOS, ENTÃO QUE:

- $f(x) = a^x$ é crescente, se $a > 1$ e decrescente, se $0 < a < 1$
- Temos para $f(0) = 1$, logo o gráfico de toda função exponencial passa pelo ponto (0,1);
- O domínio da função $f(x) = a^x$ é $D(f) = \mathbb{R}$;
- O conjunto imagem da função $f(x) = a^x$ é $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$. Assim, temos: $a^x > 0$, logo o gráfico da função para qualquer valor de x do domínio fica todo acima do eixo x.

FUNÇÃO EXPONENCIAL

- O gráfico da função exponencial cruza o eixo x?

O gráfico não intercepta o eixo x, pois a função $f(x) = a^x$ não tem raízes.

- Denominamos o eixo x como **assíntota horizontal** do gráfico da $f(x) = a^x$.

- **Reta assíntota:** é uma reta tal que a distância de um ponto de uma curva a essa reta tende a zero quando o ponto se afasta ao infinito sobre a curva

FUNÇÃO EXPONENCIAL

EXERCÍCIO:

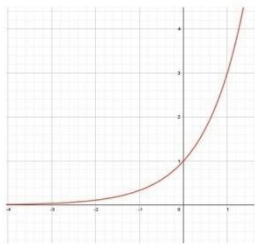
1) Esboce o gráfico, identifique como crescente ou decrescente as funções exponenciais e determine o domínio e a imagem de cada uma:

a) $f(x) = 3^x$
b) $f(x) = 2^{2x}$
c) $f(x) = 5^{-x}$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

RESPOSTA:

1) a) $f(x) = 3^x$

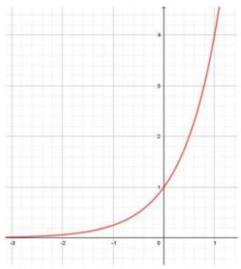


Função crescente
D(f)= $\mathbb{R}$
Im(f)= $\mathbb{R}_+^*$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

RESPOSTA:

1) b) $f(x) = 2^{2x}$

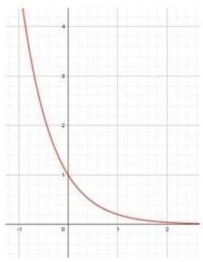


Função crescente
D(f)= $\mathbb{R}$
Im(f)= $\mathbb{R}_+^*$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

RESPOSTA:

1) c) $f(x) = 5^{-x}$



Função decrescente
D(f)= $\mathbb{R}$
Im(f)= $\mathbb{R}_+^*$

FUNÇÃO EXPONENCIAL

PROBLEMAS:

1) Em uma determinada cidade, o número de habitantes, em um raio *r*, a partir do seu centro é dado por $P(r) = k \cdot 2^{3r}$, em que *k* é constante e *r* > 0. Se há 98 304 habitantes num raio de 5 km do centro, quantos habitantes há num raio de 3 km do centro?

FUNÇÃO EXPONENCIAL

RESPOSTA PROBLEMA 1)

$P(r) = k \cdot 2^{3r}$

$98\,304 = k \cdot 2^{3 \cdot 5}$

$98\,304 = k \cdot 2^{15}$

$98\,304 = k \cdot 32\,768$

$k = \dfrac{98\,304}{32\,768}$

$k = 3$

Número de habitantes em um raio de 3km

$P(r) = k \cdot 2^{3r}$

$P(3) = 3 \cdot 2^{3 \cdot 3}$

$P(3) = 3 \cdot 2^9$

$P(3) = 3 \cdot 512$

$\boxed{P(3) = 1.536}$

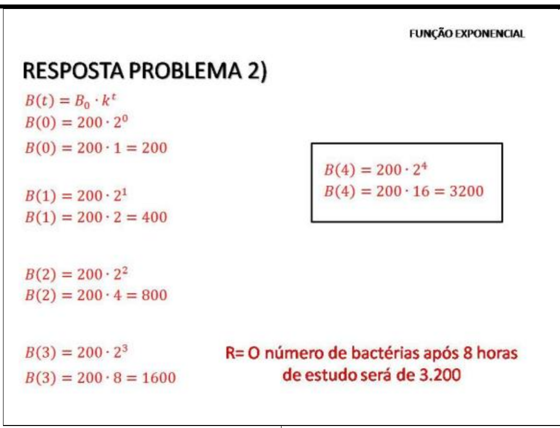
R= O número de habitantes em um raio de 3km é 1.536

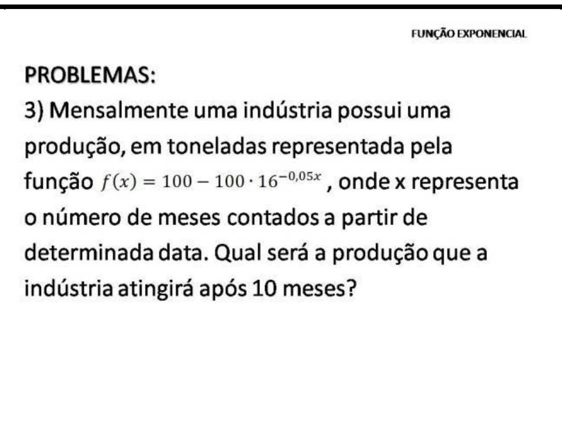
FUNÇÃO EXPONENCIAL

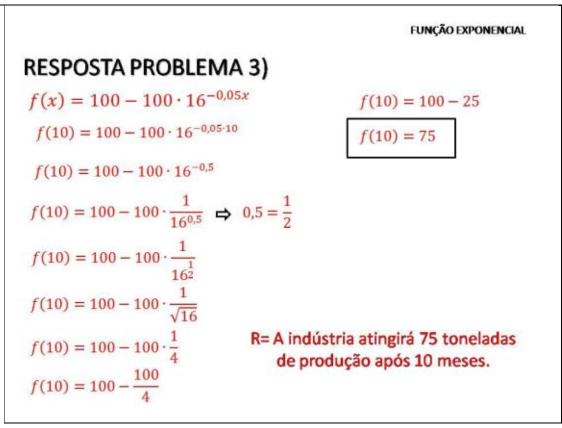
PROBLEMAS:

2) Em uma cultura há 200 bactérias no instante 0. A cada duas horas a quantidade de bactérias dobra. Determine o número de bactérias após 8 horas de estudo, sabendo que esse crescimento é dado pela lei: $B(t) = B_0 \cdot k^t$

$B(t) =$ Número de bactérias em função do tempo
$B_0 =$ Número inicial de bactérias







Além dos slides serão exibidos gráficos de funções exponenciais no *software* GeoGebra. Os alunos deverão copiar as informações apresentadas nos slides em seus respectivos cadernos e ainda, resolverem os exercícios e problemas propostos, podendo utilizar calculadoras científicas, ainda em sala de aula ou em casa se não conseguirem concluir em sala. Os exercícios e problemas serão corrigidos ao fim dessa aula ou no início da próxima, caso o tempo acabe.

Referências

ANASTASIOU, L. das G. C.; ALVES, L. P. *Processos de ensinagem na Universidade: pressupostos para as estratégias de trabalho em aula*. 3.ed. Joinville: Univille, 2004. p. 79.

CANAVARRO, A. P. *Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios*. Lisboa: Universidade Aberta, 2011.

SOKOLEK, A. B. A.; ESTEVAM, E. J. G.; BASNIAK, M. I. *O ensino exploratório e a mobilização do pensamento algébrico: reflexões acerca dos desafios para o professor.* Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/20

14/2014_unespar-uniaodavitoria_mat_artigo_adriana_beatriz_azeredo_sokolek.pdf>. Acesso em 16 de abril de 2019.