



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



### Tarefa: Probabilidade Condicionada 1: os sacos e as bolas

**Conteúdo:** Probabilidade

Fonte: DESIDÉRIO, A. F. S. **A aprendizagem da Noção de Probabilidade condicionada:** um estudo com alunos do 2º Ano do Ensino Profissional. 268f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade de Lisboa. Lisboa. 2017. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10451/33441>

#### TAREFA PROBABILIDADE CONDICIONADA 1: OS SACOS E AS BOLAS

1) Para realizar uma experiência recebeste um saco com dez bolas, numeradas de 1 a 10.

Do número 1 ao 5 as bolas são brancas e do número 6 ao 10 as bolas são laranja.

a) Diz qual é a probabilidade do número da segunda bola retirada ser par sabendo que o número da primeira bola retirada não é par e explica a tua resposta.

b) Tira uma bola com número ímpar do saco. De seguida executa a experiência de retirar a segunda bola do saco aleatoriamente, com o teu grupo, 20 vezes. Regista os resultados que obtiveste e tira uma conclusão desses resultados.



#### PLANO DE AULA

**Objetivo:**

- Calcular a probabilidade de alguns acontecimentos utilizando a noção de probabilidade condicionada.

**Conhecimentos prévios (noções de):**

- Probabilidade;
- Experiência aleatória;
- Lei de Laplace;
- Propriedades da probabilidade;
- Operações com acontecimentos (interseção).



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



---

*Capacidades transversais:*

- Raciocínio Matemático;
- Desenvolver a capacidade de formular e testar conjeturas;
- Utilização da Matemática na compreensão de situações da realidade;
- Comunicação Matemática oral e escrita, recorrendo a linguagem natural e matemática, interpretando, expressando e discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados;
- Trabalhar de forma cooperativa e colaborativa

*Recursos:*

Professor:

- Tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”, em suporte papel;
- Manual;
- PowerPoint “Probabilidade Condicionada 1”;
- Excel “Probabilidade Condicionada 1”.

Aluno:

- Tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”, em suporte papel;
- Saco com as bolas brancas e laranjas, numeradas de 1 a 10;
- Vendas pretas.

*Metodologia de trabalho:*

- A tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas” irá ser realizada pelos alunos em grupos de 4 ou 5 alunos, consoante o número de alunos na aula.
- Discussão dos resultados em grupo turma e sistematização dos conceitos envolvidos.
- Através do PowerPoint “Probabilidade Condicionada 1” irá ser introduzida a fórmula da probabilidade condicionada e a sua respetiva interpretação.

*Avaliação:*

- Avaliação da produção do trabalho dos alunos, através da recolha e análise da resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”, em formato papel;
- A observação de aulas com notas de campo com base nos seguintes aspetos:
  - Pontualidade;
  - Interesse e participação demonstrados durante a aula;



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



- Colaboração com o professor e com os colegas na resolução/ discussão da tarefa;
- Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;
- Uso de terminologia e simbologia adequada;
- Comportamento na sala de aula;

Momentos da aula	Tempo previsto (min)
(1) Início da aula	5
(2) Apresentação da tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”.	5
(3) Resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”.	20
(4) Discussão e sistematização dos resultados da tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”.	15
(5) Encerramento da Aula.	5

#### DESENVOLVIMENTO DA AULA

##### *(1) Início da aula*

A aula terá início com a distribuição dos materiais que os alunos irão necessitar de utilizar para a resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”. A professora irá pedir aos alunos, que não mexam no material que está a ser distribuído na tentativa de lhes despertar algum interesse para que, rapidamente, se forme um ambiente favorável ao início da aula. Após a entrada dos alunos e já com o material distribuído, a professora irá pedir aos alunos que formem grupos de 4 a 5 alunos consoante o número total de alunos presentes na sala de aula.

##### *(2) Apresentação da tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”*

Nesta fase a professora irá distribuir a tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”, em formato papel e uma por grupo para garantir que trabalham efetivamente em grupo. A professora irá informar que realizarão a tarefa nos grupos formados e que posteriormente, terá lugar uma discussão coletiva, onde um aluno de cada grupo, escolhidos



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



pela professora, irá apresentar as resoluções do seu grupo e as respectivas justificações. Nessa discussão eventuais dúvidas serão esclarecidas e comparados os diferentes resultados e as diferentes resoluções/estratégias.

Os alunos terão um breve momento para ler a tarefa e caso existam dúvidas generalizadas a professora deverá intervir de modo a que todos os alunos iniciem a tarefa nas mesmas condições. De seguida, a professora irá escolher um aluno para exemplificar a experiência que deverão realizar durante a tarefa de forma a tentar garantir que a experiência ocorre de acordo com o esperado.

Por último ficará definido 20 minutos de trabalho de grupo para a realização da tarefa, apresentando todos os seus cálculos e/ou raciocínios, na folha da tarefa que será para entregar.

### *(3) Resolução da tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”*

Ao longo deste momento, a professora irá estar a circular pela sala, de forma a esclarecer eventuais dúvidas e a verificar o progresso dos alunos ao longo da tarefa. Para além disso, irá certificar-se que os grupos compreenderam a experiência que irão ter de realizar. Caso existam dúvidas generalizadas a professora poderá sentir necessidade de intervir de modo a que todos os alunos consigam progredir na tarefa, interrompendo o momento de trabalho autónomo.

Neste momento, a professora irá tirar notas de observação da aula e irá tirar algumas questões que possam ser alvo de debate na fase de discussão e sistematização de resultados.

As possíveis resoluções e dificuldades estão previstas na tarefa estão abaixo.

### *(4) Discussão e sistematização dos resultados da tarefa “Probabilidade Condicionada 1: Os sacos e as bolas”*

Nesta fase, a discussão terá como objetivo principal o confronto das resoluções e resultados de todos os grupos. A professora irá escolher um aluno de cada grupo e questioná-lo sobre os seus resultados solicitando algumas justificações e/ou raciocínios. Sendo que se espera que os restantes alunos da turma coloquem questões e façam comentários de forma a gerar alguma discussão.

Através do questionamento, a professora tentará que os alunos ultrapassem as suas dificuldades e perceber se o conceito ficou compreendido por todos. Terá ainda um papel fundamental no incentivo à exposição e à discussão de ideias, processos e resultados



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



matemáticos e na gestão da interação entre os alunos, promovendo a troca de ideias e o confronto de estratégias diferentes, centrando a discussão no aluno.

Após a apresentação e discussão de resultados dos grupos, a professora irá, com o auxílio do PowerPoint “Probabilidade Condicionada 1”, questionar os alunos para garantir que estes compreenderam a noção de probabilidade condicionada. Para além disso a professora vai solicitar a um aluno da turma que faça uma possível questão a um outro aluno acerca da tarefa em causa. Por fim, a professora irá introduzir a fórmula da probabilidade condicionada, sintetizando a sua interpretação com a ajuda dos alunos e das suas aprendizagens realizadas durante a tarefa. As possíveis questões para o momento de discussão estão abaixo.

#### (5) Encerramento da aula

Nesta fase, a professora irá dar por encerrada a aula, pedindo aos alunos que arrumem as coisas e saiam da sala de forma ordeira.

### RESOLUÇÃO DA TAREFA E DISCUSSÕES

Item a) Diz qual é a probabilidade do número da segunda bola retirada ser par sabendo que o número da primeira bola retirada não é par e explica a tua resposta.

#### Resolução:

No saco há 10 bolas, das quais 5 são pares (2, 4, 6, 8, 10) e 5 são ímpares (1, 3, 5, 7, 9). Sendo que o número da primeira bola retirada não é par, então será ímpar. Assim, na segunda extração já só haverá 4 bolas ímpares e 5 bolas pares, ou seja, 9 bolas.

Logo, a probabilidade da segunda bola retirada ter o número par é  $5/9$ . Pela regra de Laplace, para acontecimentos equiprováveis, a probabilidade é o quociente entre o número de casos favoráveis (5 bolas pares) e o número de casos possíveis (9 bolas).

#### Dificuldades:

<i>Dificuldades do aluno</i>	<i>Atividades da professora</i>
Perceber que em experiências sem reposição o espaço amostral varia.	A professora deve questionar os alunos levando-os a esclarecer as suas dúvidas,



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



<i>Dificuldades do aluno</i>	<i>Atividades da professora</i>
	autonomamente: “Após a primeira extração quantas bolas ficam no saco?” “E se retirássemos 3 bolas, quantas ficariam?” “Tiramos a bola e voltamos a colocá-la dentro do saco? É uma experiência com ou sem reposição?”
Calcular o número casos favoráveis.	A professora deve questionar os alunos levando-os a esclarecer as suas dúvidas, autonomamente: “Quais são as bolas que estão no saco antes da primeira tiragem? E após? Quantas dessas bolas são pares e ímpares?”

*Discussão:*

“Após termos retirado a primeira bola quantas bolas com número par ficaram no saco?”

“Como é que se calcula a probabilidade de um acontecimento?”

“E se em vez de sair ímpar, na primeira extração, saísse par?” (A probabilidade passava a ser  $4/9$ )

Item b) Tira uma bola com número ímpar do saco. De seguida executa a experiência de retirar a segunda bola do saco aleatoriamente, com o teu grupo, 20 vezes. Regista os resultados que obtiveste e tira uma conclusão desses resultados.

*Resolução:*

*Possível Conclusão:*

Numa experiência sem reposição, após a primeira extração o espaço de resultados altera-se.

Em experiências sem reposição, a probabilidade da segunda extração é dependente da primeira extração.



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



Quantas mais vezes se fizer a experiência o valor da probabilidade tende a aproximar-se ao valor da probabilidade calculado na alínea anterior (5/9).

*Dificuldades:*

<i>Dificuldade do aluno</i>	<i>Atividade da professora</i>
Calcular a probabilidade pedida de acordo com os dados recolhidos.	A professora deve questionar os alunos levando-os à resposta, autonomamente: “Quantas bolas com o número par saíram?” “Quantas extrações fizeste?” “Neste caso qual é a probabilidade?”

*Discussão:*

“Nos vossos registos que números obtiveram? Que probabilidade obtiveram?”

“O que é que podemos concluir em relação à probabilidade que calculaste na alínea anterior?”

“Qual é a probabilidade de sair uma bola com número par na segunda extração e ímpar na primeira?” (5/10×5/9)

“Qual é a probabilidade de sair uma bola com número ímpar na primeira extração?” (5/9)

“Qual é o valor da probabilidade da segunda bola ter número par sabendo que a primeira que foi extraída tem número ímpar, se a experiência for com reposição?” (5/10)

*Discussão geral:*

“Sabendo que a primeira bola retirada tem um número ímpar, qual será a probabilidade da segunda bola retirada também ter um número ímpar?”

(P=4/9)

“Sabendo que o número da primeira bola retirada é o número 2, qual é a probabilidade da segunda bola retirada ter o número 2? Porquê?”

(P=0)

“Qual é a probabilidade da primeira bola retirada ser laranja sabendo que o seu número par?”



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



( $P=3/5$ )

“Qual é a probabilidade da primeira bola retirada ser branca sabendo que o seu número é par?”

( $P=2/5$ )

“Qual é a probabilidade da primeira bola retirada ser laranja e ímpar?”

( $P=2/5$ )

“Qual é a probabilidade da primeira bola retirada ser laranja e ímpar?”

( $P=2/5$ )

“Qual é a probabilidade da primeira bola retirada ter um número inferior a 11 sabendo que é laranja?”

( $P=1$ )



# Probabilidade Condicionada

PROF. ANDREIA DESIDÉRIO

17.FEVEREIRO.2017





Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



## Probabilidade Condicionada

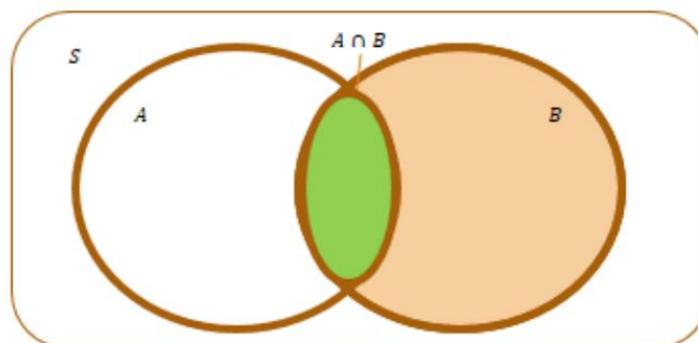
Dados dois acontecimentos  $A$  e  $B$  de um espaço de resultados  $S$  associados a uma experiência aleatória, sendo  $P(B) \neq 0$ , define-se **probabilidade de  $A$  sabendo que  $B$  ocorreu** e representa-se por  $P(A|B)$  como sendo:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A esta probabilidade dá-se o nome de **probabilidade condicionada**.

## Probabilidade Condicionada

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$





## Probabilidade Condicionada

Retomando a nossa  
experiência...

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

A: "A segunda bola a ser extraída ter número par"  
B: "A primeira bola a ser extraída ter número ímpar"

- Qual é a probabilidade do número da segunda bola ser par e o número da primeira bola ser ímpar?

$$P(A \cap B) = \frac{5}{10} \times \frac{5}{9}$$

- Qual é a probabilidade do número da primeira bola ser ímpar?

$$P(B) = \frac{5}{10}$$

- Logo, a probabilidade do número da segunda bola ser par, sabendo que o número da primeira bola é ímpar é  $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{5}{10} \times \frac{5}{9}}{\frac{5}{10}} = \frac{5}{9}$ .

## Probabilidade Condicionada

Considera agora o teu  
saco...

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Do número 1 ao 5 – Bolas brancas  
Do número 6 ao 10 – Bolas laranja

- Sabendo que o número da primeira bola retirada é o número 2, qual é a probabilidade da segunda bola retirada ter o número 2?

$$P = 0$$

- Qual é a probabilidade da primeira bola retirada ser laranja sabendo que o seu número é par?

$$P(B) = \frac{3}{5}$$

- Qual é a probabilidade da primeira bola retirada ter um número inferior a 11 sabendo que é laranja?"

$$P = 1$$