



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



## Tarefa: Paralelepípedos

**Conteúdo:** Geometria

Fonte: PEREIRA JR, J. C. A. **Ensino de Matemática mediado pelo software GeoGebra: Um enfoque em práticas de professores envolvendo simulações e animações.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual do Paraná, União da Vitória, 2021. Disponível em: <http://prpgem.unespar.edu.br/dissertacoes/resumos/joao-carlos-alves-pereira-junior>

### TAREFA PARALELEPÍPEDOS

- 1) Abra o Geogebra e, seguindo o roteiro, construir a animação<sup>1</sup>:
  - No menu *Exibir*, habilitar janela de álgebra, visualização 1 e 3 D;
  - Com a ferramenta  $\frac{a=2}{\text{---}}$  controle deslizante, construir três controles denominados comprimento (c), largura (l), e altura (h). Indicar: número min=0, máx=10 e incremento= 0,1.
  - Na caixa de entrada, digitar o comando polígono e informar os pontos: Polígono ((0,0), (c,0), (c, l), (0, l)).
  - Ao teclar *enter*, aparecerá, na janela de álgebra, a informação *quadrilátero*. Você pode renomear para pol1.
  - Na caixa de entrada, digitar o comando: prisma [pol1,h].
  - Construir um controle para planificação (p). Utilizar: min: 0 máx:1 e incremento: 0,1.
  - No campo entrada, digitar: planificação [prisma[pol1,h],p]. ▪ No campo entrada, digitar comando: Volume [c\*I\*h].
  - Para a área total, no campo *entrada*, digitar comando: Área (<Ponto>, ..., <Ponto>).
  - Salvar a animação Paralelepípedo (com os nomes dos componentes da dupla), na área de trabalho.

<sup>1</sup> A animação proposta na tarefa foi elaborada a partir de ideias disponíveis em [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org), site onde são disponibilizados materiais e recursos para capacitar usuários em seus aspectos técnicos e para fomentar reflexões sobre seu uso em situações de ensino e aprendizagem.



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



- 2) O que é possível observar nos lados do paralelepípedo planejado na janela de visualização e a relação com as arestas deste quando não está planejado, observado na janela de visualização 3D? Registre suas observações.
- 3) Movimentando os controles deslizantes, encontrem paralelepípedos que possuam 216 unidades quadradas de área e registre. Registre seus testes na quadro abaixo.

<i>Controle c</i>	<i>Controle l</i>	<i>Controle h</i>	<i>Área total</i>	<i>Volume</i>

- a) De acordo com seus achados, quais são as dimensões do paralelepípedo que possui área de 216 unidades quadradas com maior volume possível? Qual a relação existente entre as arestas, a área total e o volume?  
Generalize a relação descoberta para área total e volume do paralelepípedo.
- 4) Posicione os controles deslizantes em  $c=2$ ,  $l=3$  e  $h=4$  e complete os quadros a seguir.
- a) Acrescentando uma unidade em cada controle, repita o procedimento quatro vezes, e complete o quadro.

<i>Volume</i>	<i>Área total</i>	<i>Razão entre volumes</i>	<i>Razão entre áreas</i>
V1=	A1=	V1/V1=	A1/A1=
V2=	A2=	V2/V1=	A2/A1=
V3=	A3=	V3/V1=	A3/A1=
V4=	A4=	V4/V1=	A4/A1=
V5=	A5=	V5/V1=	A5/A1=

- b) Agora, duplique, triplique, quadruplique e quintuplique as dimensões da posição inicial dos controles e complete o quadro.

<i>Volume</i>	<i>Área total</i>	<i>Razão entre volumes</i>	<i>Razão entre áreas</i>
V1=	A1=	V1/V1=	A1/A1=
V2=	A2=	V2/V1=	A2/A1=
V3=	A3=	V3/V1=	A3/A1=
V4=	A4=	V4/V1=	A4/A1=
V5=	A5=	V5/V1=	A5/A1=

- c) Nas colunas razão entre volumes, em cada quadro, é possível observar alguma regularidade? Explique.
- d) Nas colunas razão entre áreas, em cada quadro, existe alguma regularidade? Explique.

PLANO DE AULA E QUADRO DE ORIENTAÇÕES



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



*Duração:*

- 4 aulas de 50 minutos (será utilizado 180 minutos)

*Unidade temática:*

- Geometrias

*Objetos de conhecimento:*

- Paralelepípedos reto retângulos

*Conteúdos:*

- Planificação de paralelepípedos, cálculo de área e volume de paralelepípedos.

*Ano de escolaridade:*

- 3º série do Ensino Médio

*Objetivos:*

- Identificar a representação de paralelepípedos tridimensionalmente;
- Visualizar e identificar a planificação de paralelepípedos;
- Calcular a área e volume de paralelepípedos;
- Reconhecer o cubo como um caso particular de paralelepípedo;
- Identificar e discutir se existe regularidades ao calcular área e volume de paralelepípedos, quando aumentado a medida das arestas.

*Recursos didáticos:*

Tarefa impressa, lápis, caneta, caderno para anotações, calculadora, computador com software GeoGebra 5.0 instalado, quadro e projetor multimídia.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será desenvolvida na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM), com uma abordagem centrada no aluno, diferente da abordagem tradicional, nesse caso o professor assume um papel exigente e importante na promoção da aprendizagem do aluno, focalizado no trabalho autônomo, investigativo, colaborativo e reflexivo dos alunos, geralmente organizada em fases que orientam as ações do professor, sendo:



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



- 1 - Proposição e apresentação da tarefa;
- 2 - Desenvolvimento da tarefa;
- 3 - Discussão coletiva da tarefa;
- 4 – Sistematização das aprendizagens matemáticas.

### *(1) Proposição da tarefa (20 minutos)*

A aula deverá ser iniciada com os alunos no laboratório de informática com o professor informando que esta acontecerá em duplas ou trios (essa organização dependerá do número de alunos presentes na aula, as turmas são constituídas em média por 32 alunos), será realizada a entrega da tarefa, seguida da sua leitura que poderá ser realizada voluntariamente por um aluno, posteriormente questionado aos alunos se existem termos desconhecidos por eles no enunciado para esclarecimento. Após esse momento é explicado aos alunos para registrarem de forma cuidadosa todo raciocínio utilizado durante a resolução da tarefa, pois alguns grupos serão escolhidos pelo professor e farão a socialização dos seus resultados no momento de discussão com toda a turma, sendo que serão fotografadas as resoluções e projetadas, com auxílio do projetor multimídia. Será esclarecido que o tempo para o trabalho em grupo será de 60 minutos, sendo iniciado o desenvolvimento da tarefa.

### *(2) Desenvolvimento da tarefa: trabalho nos grupos (60 minutos)*

A perspectiva do EEM prevê no planejamento do professor a realização de um quadro de orientação para possíveis ações de alunos, que conduzirão ações do professor antecipando decisões durante o desenvolvimento da tarefa. Para isso, o professor deve após elaborar, resolver a tarefa, e assim, elencar questionamentos que poderão surgir durante o trabalho dos alunos. Os quadros a seguir orientarão as possíveis ações de alunos e professor, de acordo com cada item da tarefa.

- 1) Abra o GeoGebra e, seguindo o roteiro, construir a animação<sup>2</sup>:
  - No menu Exibir, habilitar janela de álgebra, visualização 1 e 3 D;
  - Com a ferramenta  controle deslizante, construir três controles denominados comprimento (c), largura (l), e altura (h). Indicar: número min=0, máx=10 e incremento= 0,1.
  - Na caixa de entrada, digitar o comando polígono e informar os pontos:

<sup>2</sup> A animação proposta na tarefa foi elaborada a partir de ideias disponíveis em [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org), site onde são disponibilizados materiais e recursos para capacitar usuários em seus aspectos técnicos e para fomentar reflexões sobre seu uso em situações de ensino e aprendizagem.



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



Polígono  $((0,0), (c,0), (c, l), (0, l))$ .

- Ao teclar *enter*, aparecerá, na janela de álgebra, a informação *quadrilátero*. Você pode renomear para *pol1*.
- Na caixa de entrada, digitar o comando: *prisma [pol1,h]*.
- Construir um controle para planificação (*p*). Utilizar: *min: 0 máx:1* e *incremento: 0,1*.
- No campo entrada, digitar: *planificação [prisma[pol1,h],p]*. ▪ No campo entrada, digitar comando: *Volume [c\*l\*h]*.
- Para a área total, no campo *entrada*, digitar comando: *Área (<Ponto>, ..., <Ponto>)*.
- Salvar a animação Paralelepípedo (com os nomes dos componentes da dupla), na área de trabalho.

<i>Ações de alunos</i>	<i>Ações de professores</i>
Não entendem o roteiro.	Pede que realizem novamente a leitura.
Têm dificuldade em manipular as ferramentas no GeoGebra.	Realizar o reconhecimento da interface, mostrando os comandos e ferramentas com auxílio do projetor.
Têm dificuldade em localizar as ferramentas ou comandos da tarefa.	Pedir que explorem novamente as ferramentas, persistindo a dificuldade, mostrar no projetor.
Apresentam dificuldade nos conceitos de matemática: polígono, quadrilátero, aresta, lado, área e volume.	Esclarecer, relembrar os conceitos.  (Essa ação poderá ser necessária mesmo com a leitura da tarefa e questionamentos realizados na proposição).
Questionam porque o mínimo no controle deslizante não pode ser negativo.	Sugere pensarem nos instrumentos de medida, e questiona sobre a existência de medidas de comprimento ou áreas negativas.
Questionam a utilização das letras <i>c, l, h</i> , para representar os controles deslizantes.	Solicita que observem o que é alterado na figura representada no GeoGebra com a movimentação dos controles deslizantes e explica que poderão



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



<i>Ações de alunos</i>	<i>Ações de professores</i>
	representar com qualquer letra, porém alerta para que estejam atentos na sequência do roteiro.
Têm dificuldades ao informar os comandos no campo entrada.	Pede que observem atentamente as informações do roteiro, alertando que no software ao ser informado caracteres incorretos este retorna para verificar a estrutura do comando.
Questionam a utilização das coordenadas do comando polígono.	Pede que observem os controles c e l, e relacionem o seu significado as coordenadas.
Questionam porque renomear o quadrilátero após utilização do comando polígono.	Esclarece que é para auxiliar na sequência da construção, não sendo obrigatório, porém deve-se observar a sua representação na sequência dos comandos que serão solicitados.
Questionam a utilização do comando prisma e a relação com o quadrilátero e controle deslizante h.	Pede que movimentem o controle h e observem o que acontece.
Questionam a utilização de máximo 1 no controle deslizante p.	Pede que observem e pensem na planificação do objeto presente no GeoGebra, ao digitar o comando planificação orienta que movimentem o controle deslizante p e observem a resposta do software.
Informam de forma incorreta o comando planificação.	Pede que observem o comando no roteiro e que se atenham aos caracteres informados.
Informam o comando volume, mas tem dificuldade para relacionar com a animação.	Pede que os alunos movimentem os controles c, l, h, em diferentes posições e observem a resposta do software nas janelas de visualização.
Têm dificuldade para visualizar e informar os vértices de cada face	Pede que os alunos movimentem o controle planificação para auxiliar na verificação dos vértices de cada face na janela de visualização.



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



<i>Ações de alunos</i>	<i>Ações de professores</i>
do paralelepípedo no comando área.	

2) O que é possível observar nos lados do paralelepípedo planejado na janela de visualização e a relação com as arestas deste quando não está planejado, observado na janela de visualização 3D? Registre suas observações.

<i>Ações de alunos</i>	<i>Ações de professores</i>
Não entendem o que é para fazer.	Pede que movimentem o controle da planificação e observem o que acontece na janela de visualização 1, 3D.
Respondem que o número de lados na planificação é maior que número de arestas do sólido.	Pede que movimentem o controle da planificação e comparem.
Respondem que o número de arestas é a metade do número de lados da planificação.	Pede que registrem suas conclusões.

3) Movimentando os controles deslizantes, encontrem paralelepípedos que possuam 216 unidades quadradas de área e registre. Registre seus testes no quadro abaixo.

<i>Controle c</i>	<i>Controle l</i>	<i>Controle h</i>	<i>Área total</i>	<i>Volume</i>

a) De acordo com seus achados, quais são as dimensões do paralelepípedo que possui área de 216 unidades quadradas com maior volume possível? Qual a relação existente entre as arestas, a área total e o volume?

Generalize a relação descoberta para área total e volume do paralelepípedo.



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
 Financiamento:  
 Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
 Tecnológico - CNPq



<i>Ações de alunos</i>	<i>Ações de professores</i>
Os alunos têm dificuldades para encontrar paralelepípedos com 216 unidades quadradas de área.	Incentiva que os alunos explorem na animação medidas com dimensões decimais e não decimais nos controles deslizantes, observando a resposta do software para área e volume.
Os alunos perguntam se é possível ou podem utilizar a fatoração para resolução.	O professor incentiva que façam suas investigações e registrem seu raciocínio, questionando de que forma a fatoração irá auxiliar.
Os alunos encontram o maior volume possível, mas não conseguem descrever a relação das arestas.	Pede aos alunos que verifiquem as semelhanças nas posições que se encontram os controles.
Os alunos identificam que as arestas para o maior volume possível têm a mesma medida, mas não conseguem registrar a relação.	Incentiva aos alunos a registrarem a igualdade de $c = l = h$ e observarem as faces movimentando o controle da planificação.
Os alunos conseguem identificar e relacionar as arestas do paralelepípedo na área total e volume.	Incentiva os alunos a registrarem suas observações, conclusões detalhando seu raciocínio.

- 4) Posicione os controles deslizantes em  $c=2$ ,  $l=3$  e  $h=4$  e complete os quadros a seguir.
- a) Acrescentando uma unidade em cada controle, repita o procedimento quatro vezes, e complete o quadro.

<i>Volume</i>	<i>Área total</i>	<i>Razão entre volumes</i>	<i>Razão entre áreas</i>
V1=	A1=	V1/V1=	A1/A1=
V2=	A2=	V2/V1=	A2/A1=
V3=	A3=	V3/V1=	A3/A1=
V4=	A4=	V4/V1=	A4/A1=
V5=	A5=	V5/V1=	A5/A1=



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
 Financiamento:  
 Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
 Tecnológico - CNPq



<i>Ações de alunos</i>	<i>Ações de professores</i>
Têm dificuldade em entender o procedimento acréscimo de uma unidade.	Esclarece que deve ser acrescentado uma unidade em cada dimensão, pede que os alunos visualizem a animação e observem os controles em cada uma das etapas.

b) Agora, duplique, triplique, quadruplique e quintuplique as dimensões da posição inicial dos controles e complete o quadro.

<i>Volume</i>	<i>Área total</i>	<i>Razão entre volumes</i>	<i>Razão entre áreas</i>
V1=	A1=	V1/V1=	A1/A1=
V2=	A2=	V2/V1=	A2/A1=
V3=	A3=	V3/V1=	A3/A1=
V4=	A4=	V4/V1=	A4/A1=
V5=	A5=	V5/V1=	A5/A1=

<i>Ações de alunos</i>	<i>Ações de professores</i>
Têm dificuldade de entender o procedimento duplicar triplicar...	Esclarece que deve ser multiplicado em cada vez a posição inicial do controle.
Identificam não ser possível nos controles triplicar, quadruplicar e quintuplicar, devido ao máximo 10 atribuído aos controles.	Incentiva os alunos para em propriedades dos controles c, l, h, que investiguem a possibilidade de alterar o máximo para que possa ser realizado.

c) Nas colunas razão entre volumes, em cada quadro, é possível observar alguma regularidade? Explique.

<i>Ações de alunos</i>	<i>Ações de professores</i>
Têm dificuldade em identificar regularidades.	Pede que observem as sequencias no quadro nas colunas razão volume distintamente em cada quadro, e orienta que observem a animação de cada caso na planificação.
Percebem que não existe a regularidade no quadro 1,	Incentiva a utilizar a representação dos resultados na forma de potência.



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



<i>Ações de alunos</i>	<i>Ações de professores</i>
identificam a regularidade no quadro 2, mas não conseguem explicar.	

d) Nas colunas razão entre áreas, em cada quadro, existe alguma regularidade? Explique.

<i>Ações de alunos</i>	<i>Ações de professores</i>
Apresentam dificuldade em identificar a regularidade.	Pede que os alunos observem as sequencias no quadro nas colunas razão área distintamente em cada quadro, e orienta que observem a animação de cada caso na planificação.
Constatam que não existe a regularidade no quadro 1, identificam a regularidade no quadro 2, mas não conseguem explicar.	Incentiva a utilizar a representação dos resultados na forma de potência.

Durante o desenvolvimento da tarefa ao monitorar os alunos o professor irá selecionar alguns grupos que irão contribuir com a discussão coletiva da tarefa, as resoluções escolhidas para serem compartilhadas certas ou erradas, deverão apoiar a sistematização das aprendizagens.

### *(3) Discussão coletiva da tarefa (50 minutos)*

Nesse momento ocorrerá a socialização das resoluções intencionalmente escolhidas pelo professor, o qual instigará a participação de todos os integrantes do grupo na apresentação, explicando o raciocínio utilizado e também será solicitado que os grupos utilizem a simulação construída para auxiliar sua explanação. O sequenciamento das apresentações acontecerá por resoluções menos formais para resoluções de forma mais sistematizada. Na questão 1 por exemplo, poderá ser escolhido um grupo que teve dificuldade ao construir a animação, relatando suas dificuldades, e um grupo que tenha construído sem maiores dificuldades. Na questão 2 grupos que registraram suas conclusões sem perceber a relação de lados na planificação e arestas no sólido, para um grupo que tenha observado tal



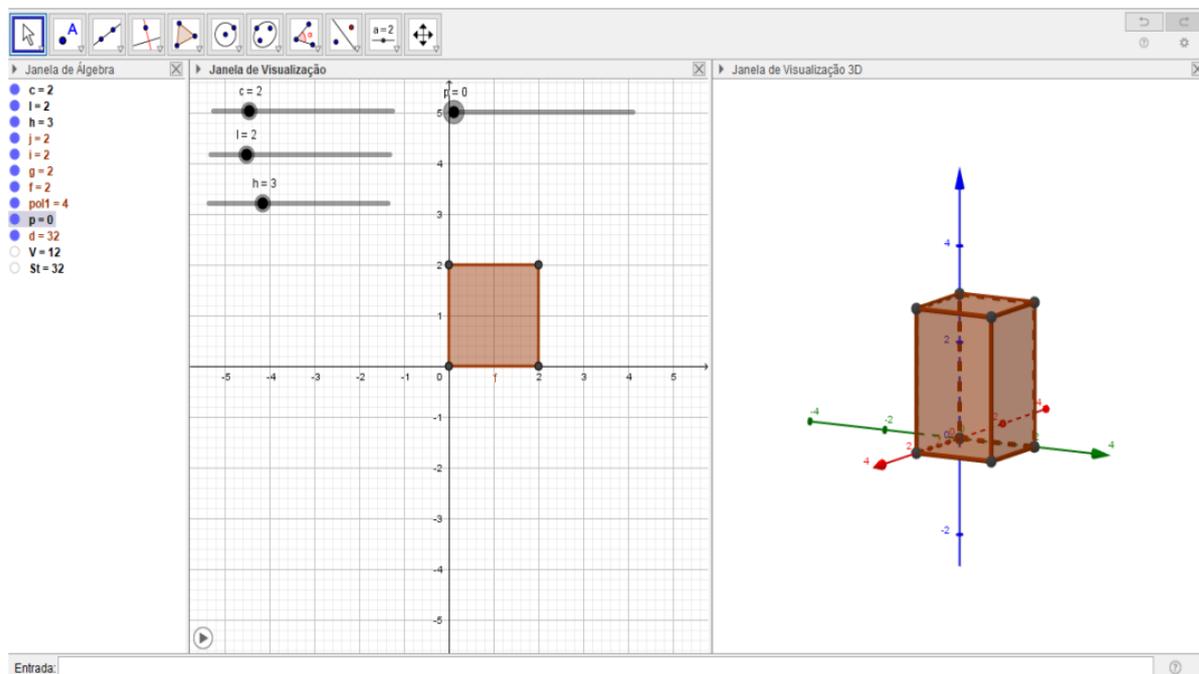
Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



relação e ainda relacionado com a relação de Euler. Para questão 3 um grupo que não tenha conseguido encontrar o maior volume possível, mas que considere ter encontrado e outro que tenha encontrado, mas não percebido a relação das arestas para área e volume, ainda um terceiro grupo que tenha conseguido perceber as relações das arestas para maior volume e chegado à conclusão que isso ocorra no caso especial de paralelepípedo denominado cubo ou hexaedro. Na questão 4 itens a, b, c, d, serão consideradas duas resoluções com os quadros preenchidos, porém uma que julgue ter encontrado regularidade e outra que não, para que possam ser discutidas com a turma, o raciocínio empregado.

#### (4) Sistematização das aprendizagens matemáticas (30 minutos)

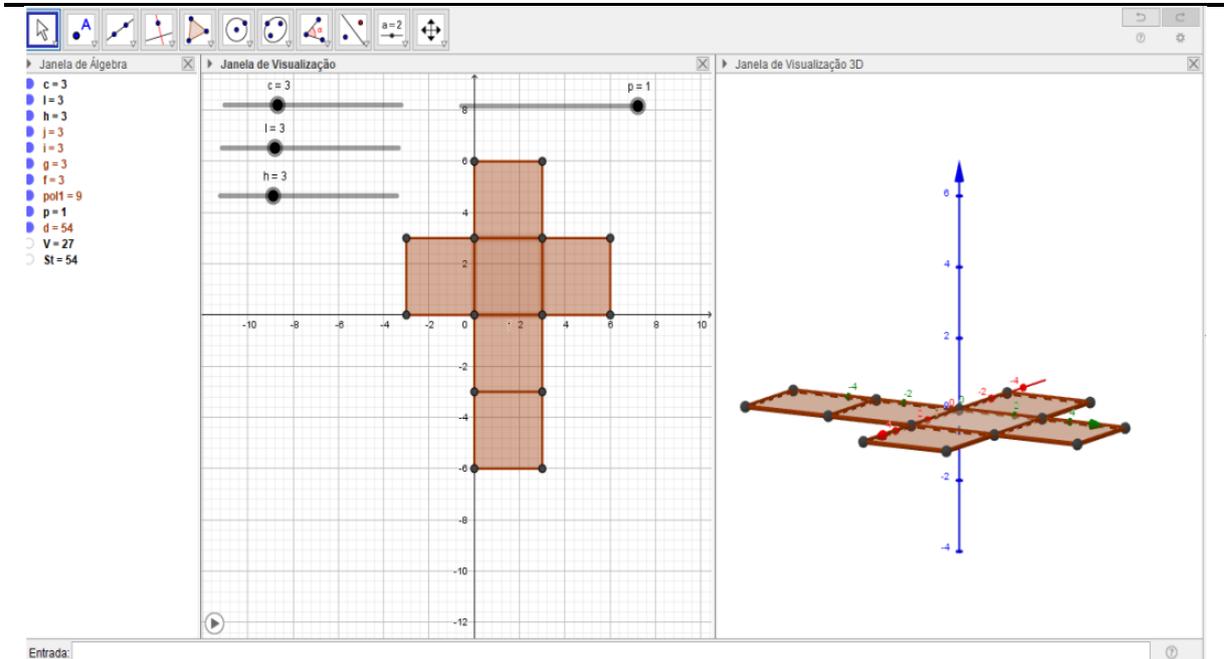
Na sistematização o professor retoma as resoluções para então com a participação dos alunos passa a registrar as ideias na lousa e pede que realizem as anotações nos cadernos. Para sistematização na questão 1, o professor vai projetar a animação com auxílio de um aluno para manipular os controles deslizantes utilizando a função animar em especial na planificação, ouvindo os alunos em relação as facilidades e dificuldades proporcionadas pela animação.



2) O professor deverá evidenciar que os lados da figura planificada é o dobro das arestas do sólido. Apresentar ou retomar a relação de Euler.



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
 Financiamento:  
 Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
 Tecnológico - CNPq



3) O professor deverá discutir com os alunos algumas das possibilidades encontradas na animação para área e volume 216, enfatizando  $c=l=h=6$ , discutindo em quais situações do cotidiano seria melhor utilizar as demais medidas e o que isso implica.

- Mostrar que quando as arestas possuem a mesma medida é considerado um caso particular, onde o paralelepípedo é chamado de cubo ou hexaedro. Na generalização mostrar que  $c=l=h$  ou seja  $V$  pode ser escrito  $c, l$  ou  $h$  ao cubo. Na área  $c, l$ , ou  $h$  ao quadrado multiplicado por seis.

Na questão 4, os itens a e b deverão ser projetados os quadros com os valores preenchidos para cada caso.

- a) Acrescentando uma unidade em cada controle, repita o procedimento quatro vezes, e complete o quadro.

<i>Volume</i>	<i>Área total</i>	<i>Razão entre volumes</i>	<i>Razão entre áreas</i>
V1= 24	A1= 52	V1/V1= 1	A1/A1= 1
V2= 60	A2= 94	V2/V1= 2,5	A2/A1= 1,807...
V3= 120	A3= 148	V3/V1= 5	A3/A1= 2,846...
V4= 210	A4= 214	V4/V1= 8,75	A4/A1= 4,115...
V5= 336	A5= 292	V5/V1= 14	A5/A1= 5,615...

- b) Agora, duplique, triplique, quadruple e quintuple as dimensões da posição inicial dos controles e complete o quadro.



Projeto de Pesquisa:  
**Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica**  
Financiamento:  
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e  
Tecnológico - CNPq



<i>Volume</i>	<i>Área total</i>	<i>Razão entre volumes</i>	<i>Razão entre áreas</i>
V1= 24	A1= 52	V1/V1= 1	A1/A1= 1
V2= 192	A2= 208	V2/V1= 8	A2/A1= 4
V3= 648	A3= 468	V3/V1= 27	A3/A1= 9
V4= 1536	A4= 832	V4/V1= 64	A4/A1= 16
V5= 3000	A5= 1300	V5/V1= 125	A5/A1= 25

Para discussão das questões c e d, os quadros serão projetados pelo professor para visualizar a/na animação, discutindo em que caso ocorre a regularidade no cálculo de volume e área quando se altera a medida das arestas, se isso acontece para qualquer paralelepípedo. O Conceito de proporcionalidade presente nesses paralelepípedos conforme ocorre o aumento da medida das arestas, que pode ser observado no item b representado por potências explicitando o que isso significa e implica, tendo como referência o paralelepípedo inicial  $c=2$   $l=3$   $h=4$ .

*(5) Avaliação (20 minutos)*

A avaliação será processual formativa e concomitante, considerando a interação, comunicação, comprometimento dos grupos, discussões com o professor durante todo o desenvolvimento das aulas e anotações realizadas. Assim, o arquivo da animação construída pelos grupos e todas as anotações realizadas durante a tarefa bem como no momento da sistematização servirão de elementos de análise pelo professor.