



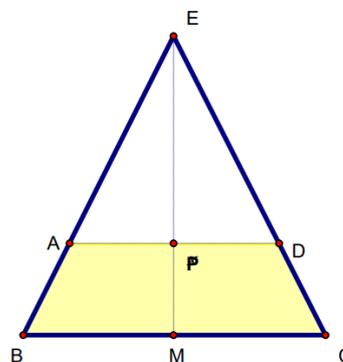
Tarefa: Deslizando sobre o triângulo

Conteúdo: Função Quadrática

Fonte: MATIAS, A. F. F. S. A **Comunicação matemática escrita no 10º ano de escolaridade em contexto de trabalho de grupo**. 145f. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/22535?mode=full>

TAREFA DESLIZANDO SOBRE O TRIÂNGULO

- 1) [BCE] é um triângulo isósceles. A sua altura mede 5 cm, assim como a sua base, [BC]. P é um ponto que se desloca de M (ponto médio de [BC]) para E, arrastando o segmento [AD] nesse movimento.



- 1.1) Mostra que se o ponto P se deslocar 3 cm, então a área do trapézio [ABCD] é igual a $10,5 \text{ cm}^2$.
 - 1.2) Quando P se deslocar 4 cm, qual é a área do trapézio [ABCD]?
 - 1.3) Qual deve ser o valor do deslocamento do ponto P para que a área do trapézio [ABCD] é igual a 8 cm^2 ?
 - 1.4) Designa por x o deslocamento de P e por A a área de [ABCD]. Esboça o gráfico que relaciona A com x .
 - 1.5) Mostra que a área do trapézio [ABCD] é dada pela expressão algébrica $A(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x$. Indica o seu domínio e contradomínio.
- 2) Considera agora a função $A(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x$, fora do contexto do problema.



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



- 2.1) Com o auxílio da calculadora, esboça um gráfico da função A . Que tipo de gráfico é?
- 2.2) Indica o domínio e o contradomínio da função.
- 2.3) Faz o estudo do sinal e dos zeros da função.
- 2.4) Indica os intervalos de monotonia da função.
- 3) Escreve uma expressão que relacione a área (T) do triângulo $[ADE]$ com o deslocamento (x) de P . Indica o seu domínio e contradomínio.
- 4) Considera agora a função T , fora do contexto do problema.
 - 4.1) Com o auxílio da calculadora, esboça um gráfico da função. Que tipo de gráfico é?
 - 4.2) Indica o domínio e o contradomínio da função.
 - 4.3) Faz o estudo do sinal e dos zeros da função.
 - 4.4) Indica os intervalos de monotonia da função.

PLANO DE AULA

Duração:

- 90 minutos

Tópico:

- Funções e Gráficos

Subtópicos:

- Função quadrática

Sumário:

- Estudo da Função Quadrática. Resolução de Problemas em trabalho de grupo.

Ano de escolaridade:

- Secundário – 10º

Principais objetivos da aula:

- Identificar a parábola como gráfico da função quadrática;
- Estudar algumas propriedades do gráfico da função quadrática e entender o seu significado no contexto dos problemas;



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



- Utilizar a calculadora gráfica como recurso ao estudo da função.

Principais tópicos, noções e conceitos envolvidos:

- Noção de função;
- Propriedades das funções: domínio, contradomínio, sinal, zeros, monotonia e extremos;
- Equações de 2.º grau;
- Área de polígonos.

Capacidades transversais:

- Resolução de Problemas;
- Comunicação Matemática.

Recursos:

A trazer pelo aluno:

- Manual (Parte 2);
- Calculadora gráfica;
- Caderno diário.

A trazer pelo professor:

- Calculadora gráfica;
- Computador;
- Fichas de trabalho;
- Canetas para quadro branco.

Metodologia da aula:

Desenvolvimento de trabalho em pequenos grupos (3 a 4 elementos) - Fichas de trabalho. Sistematização, em turma, da resolução dos problemas realizados, com recurso ao *sketchpad*.

Momentos da aula:

(1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam.	5 minutos
(2) Resolução, em pequenos grupos, de uma Ficha de Trabalho (“ <i>Deslizando sobre o triângulo</i> ”).	45 minutos
(3) Resolução, em pequenos grupos, de uma Ficha de Trabalho (“ <i>Áreas e Perímetros de retângulos</i> ”).	20 minutos
(4) Sistematização dos tópicos trabalhados.	15 minutos
(5) Marcação do TPC.	5 minutos



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



DESENVOLVIMENTO DA AULA

(1) Registo do sumário no caderno dos alunos. Anotação dos alunos que faltam (5 minutos)

(2) *Resolução, em pequenos grupos, da Ficha de Trabalho “Deslizando sobre o triângulo” (45 minutos)*

Nota: O professor deve pedir aos alunos que formem os grupos de trabalho habituais.

O professor deve circular pelos grupos e:

- Fazer um levantamento de questões que possam surgir e que devam ser discutidas em grande grupo;
- Esclarecer dúvidas pontuais, orientando os alunos para atingirem o objetivo da tarefa;
- Acompanhar o trabalho desenvolvido pelos alunos, fazendo questões orientadoras de forma a ajudar os alunos a ultrapassar as dificuldades, tendo em conta (1) as estratégias utilizadas; (2) o ritmo de trabalho dos diferentes grupos;

(2.1) *Resolução do exercício 1.1*

- *Dificuldades:* Alguns alunos poderão ter dificuldade em calcular a distância entre os pontos A e D.

Os alunos deverão identificar a semelhança entre os triângulos [BCE] e [ADE] e traduzi-la na razão entre comprimentos: *que polígonos estão representados na figura? De que forma poderei calcular a área do trapézio? Haverá relação entre a o comprimento de [AD] e alguma outra medida?*

Possíveis estratégias de resolução:

(E1) Cálculo da área do trapézio, usando a sua fórmula: $\frac{(B+b)}{2} h$.

(E2) Cálculo da área do trapézio como diferença da área de dois triângulos: [EBC] e [EAD].

(2.2) *Resolução do exercício 1.2*



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Após a resolução de 1.1, os alunos não deverão ter dificuldades em fazer o exercício 1.2. Os alunos deverão perceber que a razão entre a base e a altura dos triângulos é de 1. Deverão ser alertados para a justificação dos cálculos que utilizam.

(2.3) Resolução do exercício 1.3

- *Dificuldades:* Alguns alunos poderão sentir alguma dificuldade em fazer o raciocínio inverso ao das alíneas anteriores. Deve-se apelar ao seu método de resolução da área do trapézio e reforçar os dados que têm agora e os dados que querem descobrir.

Os alunos podem recorrer à calculadora gráfica para resolver a equação de 2º grau.

Os alunos devem compreender que apenas uma das soluções da equação é resposta ao problema. Poderá aqui ser questionado o domínio da área do trapézio em função do deslocamento x , sem antes ter sido escrita a sua expressão.

(2.4) Resolução do exercício 1.4

- *Dificuldades:* Alguns alunos poderão ter a tendência de desenhar um gráfico linear.

Neste caso, os deverão ser alertados para as três alíneas anteriores que relacionam a área do trapézio [ABCD] com o deslocamento x . Deverão compreender que estes valores representam pontos do gráfico, e devem ser utilizados para fazer o esboço. Deverão também ser alertados para outros pontos notáveis da função.

O que acontece à área do trapézio, quando P coincide com M? E quando P coincide com E?

(2.5) Resolução do exercício 1.5

- *Dificuldades:*
 - (1) Os alunos que tiverem dificuldade em resolver a alínea deverão ser confrontados com o método que utilizaram para o cálculo da área do trapézio nas alíneas anteriores.
 - ❖ Deve pedir-se que escrevam a área do trapézio, representando as distâncias necessários através dos pontos assinalados;



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



❖ Devem escrever, então, as distâncias desconhecidas em função do deslocamento x .

(2) Após fazerem o esboço do gráfico (1.4), à partida já não haverá dificuldades em identificar o domínio e contradomínio da função. No entanto, caso ainda haja dificuldades neste sentido, poderão ser colocadas as questões:

Onde se pode deslocar o ponto P ? Quais serão os valores que poderá tomar?

Que valores toma a área do trapézio, quando P coincide com M ? E 85 quando P coincide com E ?

(2.6) Resolução do exercício 2

Neste exercício, os alunos serão confrontados com a questão domínio da função/domínio do problema. Deverão perceber que no exercício anterior estavam a considerar uma restrição do domínio da função.

- *Dificuldades:* À partida não haverá dificuldades relativas ao uso da calculadora para encontrar os zeros e o máximo da função, pois os alunos já estão habituados a este tipo de exercício. No entanto, caso ainda haja dúvidas, serão dadas instruções nesse sentido.

Também as noções de sinal e monotonia já são conhecidas pelos alunos.

(2.7) Resolução do exercício 3

Possíveis estratégias de resolução:

(E1) Cálculo da área do trapézio, usando a sua fórmula: $\frac{b \times h}{2}$.

Os alunos deverão seguir o raciocínio do exercício 1, utilizando a razão entre a base e a altura dos triângulos. Assim rapidamente concluirão que $\overline{AD} = \overline{PE} = 5 - x$.

(E2) Cálculo da área do triângulo [EAD] como diferença entre a área do triângulo [EBC] e do trapézio [ABCD]. Os alunos que optarem por esta resolução, terão apenas que calcular a área do triângulo [EBC], uma vez que a área do trapézio já foi calculada (e é enunciada na ficha).

(2.8) Resolução do exercício 4



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Neste exercício, os alunos serão confrontados com a questão domínio da função vs. domínio do problema. Deverão perceber que no exercício anterior estavam a considerar uma restrição do domínio da função.

- *Dificuldades:* À partida não haverá dificuldades relativas ao uso da calculadora para encontrar os zeros e o máximo da função, pois os alunos já estão habituados a este tipo de exercício. No entanto, caso ainda haja dúvidas, serão dadas instruções nesse sentido.
Também as noções de sinal e monotonia já são conhecidas pelos alunos.

(3) Resolução, em pequenos grupos, da Ficha de Trabalho “Áreas e Perímetros de retângulos” (20 minutos)

Nota: A ficha de trabalho será dada a cada grupo à medida que vão terminando a ficha de trabalho anterior. Caso haja alunos que não cheguem a realizá-la na aula, levarão a ficha para TPC.

(3.1) Resolução do Exercício 1

Os alunos não deverão ter dificuldades em desenhar os retângulos, mas haverá uma tendência para desenharem retângulos cujos lados têm como medida números inteiros. Deve-lhes ser pedido que desenhem, pelo menos, 4 retângulos.

Para o cálculo das áreas dos retângulos, também não devem surgir dúvidas.

(3.2) Resolução do Exercício 1.1

Os alunos deverão começar por encontrar a outra medida do lado do retângulo, para, então, calcular a sua área. Não deverão surgir dificuldades na realização deste exercício.

(3.3) Resolução do Exercício 1.2

- *Dificuldades:* Alguns alunos poderão escrever uma equação com duas variáveis que representam ambos os lados do retângulo. Caso não consigam resolver o problema, deve-lhes ser pedido para relacionar uma variável com a outra. A representação do retângulo poderá ajudar.

Se um dos lados do retângulo for x , quanto medirá o outro?

(3.4) Resolução do Exercício 2



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Após a resolução do exercício anterior, os alunos já deverão conseguir expressar um lado do retângulo em função do outro.

Os alunos deverão, então, recorrer à calculadora para esboçar o gráfico e calcular o seu máximo.

Deverão, também, fazer a interpretação geométrica do gráfico obtido.

Que tipo de gráfico obtemos? Que retângulo obtemos quando a sua área é máxima?

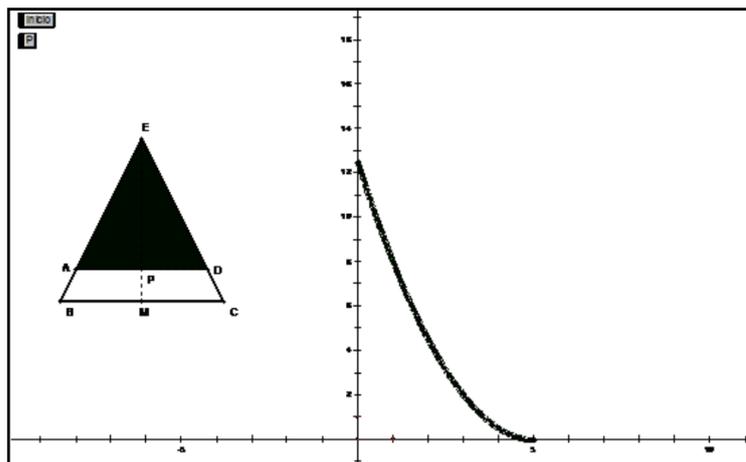
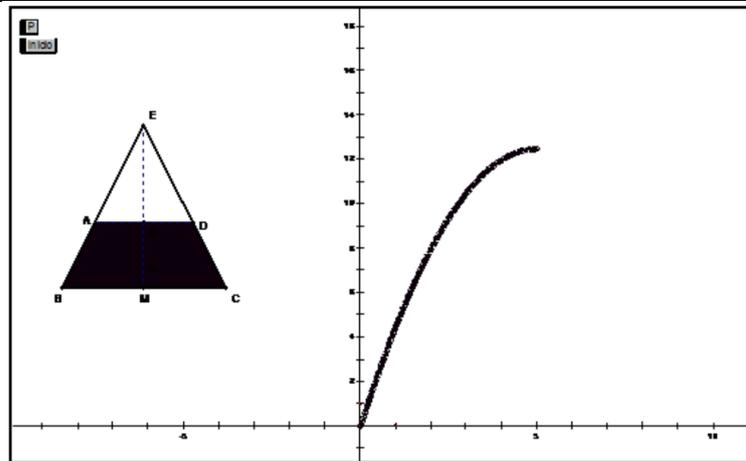
- *Dificuldades:* Poderão surgir algumas dúvidas relativamente ao domínio da função. Os alunos podem considerar um de dois casos: $x \in]0, 10[$ ou $x \in]0, 5]$. Os alunos que considerarem o primeiro caso, devem ser levados a questionar-se sobre as dimensões dos retângulos, a simetria da função e o seu significado geométrico. Quanto aos que considerarem o segundo caso, devem recordar que a área é escrita em função de um dos lados, logo, o lado pode tomar qualquer valor entre 0 e 10.

Os alunos voltarão a ser confrontados com a questão domínio da função/domínio do problema. Deverão perceber que no exercício anterior estavam a considerar uma restrição do domínio da função.

(4) Sistematização dos tópicos trabalhados (15 minutos)

Nota: A sistematização será feita apenas se todos os alunos terminarem na aula, ambas as tarefas propostas.

Através do programa *sketchpad*, os alunos vão poder observar o gráfico que traduz a área do trapézio e do triângulo, em função do deslocamento de P. Poderão comparar o gráfico com o esboço que fizeram e confirmar se as expressões que encontraram traduzem as relações entre a área dos polígonos e o deslocamento x .

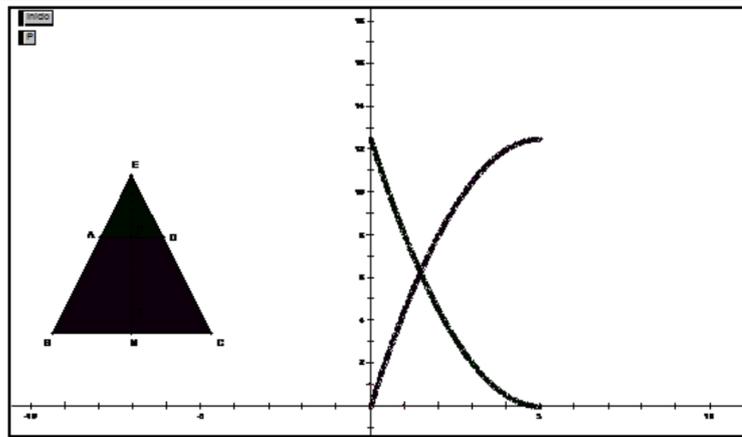


Também se observarão os dois gráficos em simultâneo, de forma a interpretar geometricamente a situação:

- *quando o ponto P coincide com M, que valores tomam as áreas dos polígonos?*
- *e quando coincide com E?*
- *quando é que os polígonos têm áreas iguais?*



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Aquando da discussão, os alunos deverão também ser questionados quanto:

- ao domínio e contradomínio da função e domínio e contradomínio no contexto do problema;
- às semelhanças/diferenças entre as características dos gráficos das funções (extremos, monotonia, simetria).

(5) Registrar, no quadro, o trabalho para casa (5 minutos)

Resolver o exercício 32 da página 42 e propostas 11, 12 e 13 da página 110.

DADOS SOBRE AS APRENDIZAGENS DOS ALUNOS

Apesar das tarefas da aula serem realizadas em grupo, serão recolhidas as resoluções de todos os alunos, o que permitirá avaliar se cada grupo é coerente no trabalho apresentado, se foram escolhidas diferentes estratégias de resolução por parte dos grupos de alunos, de que forma os alunos fazem o registo deste tipo de tarefas investigativas e de que forma apresentam os seus registos relativos a exercícios que exijam o recurso à máquina calculadora gráfica.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Sendo está uma turma bastante heterogênea, há alunos que têm um ritmo de trabalho bastante superior a outros alunos.



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Como se pretende recolher todas as fichas relativas à primeira ficha de trabalho (“*Deslizando sobre o triângulo*”), a discussão da tarefa não será feita em seguida, sendo dada uma segunda ficha de trabalho àqueles que terminarem.

Apenas se iniciará a discussão da tarefa em grande grupo, caso a maioria dos alunos termine a segunda ficha de trabalho. Caso contrário será feita na aula seguinte.

Ainda assim, caso algum grupo termine ambas as tarefas mais rapidamente do que os outros grupos, ser-lhes-á sugerido que resolvam os exercícios propostos para trabalho de casa.

Caso a *planificação prevista não seja cumprida*, a segunda tarefa proposta para a aula será proposta para trabalho para casa.