Tarefa: De volta às funções

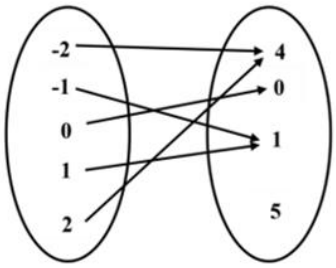
Conteúdo: Função Afim

Fonte: RODRIGUES, A. F. A. **O raciocínio funcional de alunos de 8º ano na resolução de tarefas.** 221f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade de Lisboa, Lisboa, 2016. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/29612

TAREFA DE VOLTA ÀS FUNÇÕES

1) Considera as correspondências representadas em seguida:

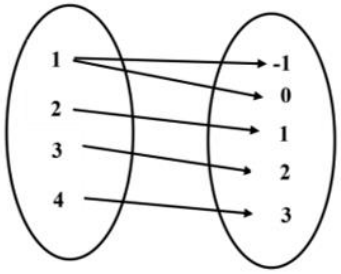
(A)



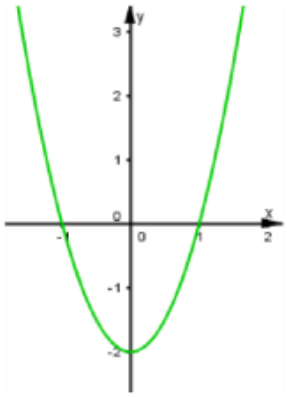
(B)

x	y
0	3
-1	3
-2	6
-3	9
-4	12

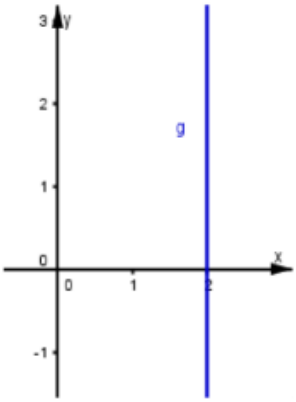
(C)



(D)



(E)



(F)

x	y
0	0
0	4
2	6
3	1
4	8

1.1) Indica as correspondências que representam funções. Justifica a tua resposta.

1.2) Indica o conjunto de partida e o conjunto de chegada da correspondência (A).

1.3) Na correspondência (A), indica o domínio e o contradomínio.

2) O automóvel do Sr. Paulo consome 1 litro de combustível a cada 8 km.

2.1) Completa a tabela seguinte:

Distância (*km*)	8		24	32	
Consumo (*l*)	1	2			5

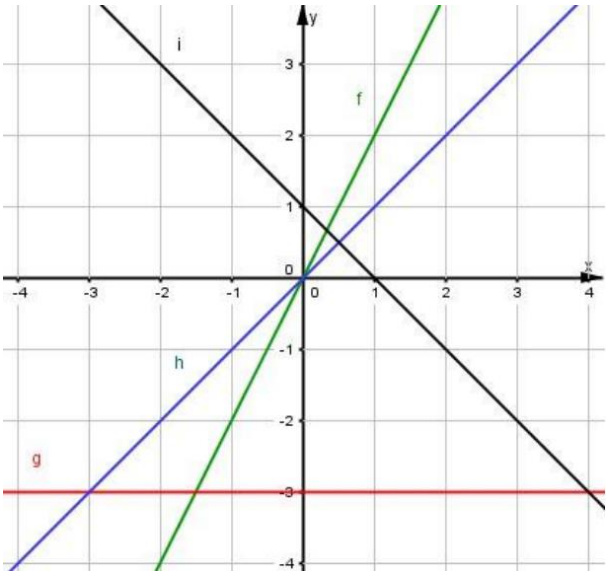
2.2) O consumo é função da distância percorrida? Justifica.

2.3) Identifica a variável independente e variável dependente.

2.4) Representa graficamente esta função (usando a folha de papel milimétrico).

2.5) Escreve a expressão algébrica que associa o consumo de combustível à distância percorrida.

3) Considera os gráficos das funções *f*, *g*, *h* e *i*:



3.1) Quais as funções constantes? E quais as funções lineares? Quais as funções afins? Justifica.

3.2) Completa, explicando como chegaste a cada um dos valores:

3.2.1) $i(0) =$

3.2.2) A imagem de -2 pela função *h* é ...

3.2.3) $i(4) =$

3.2.4) O objeto com imagem -4 através da função *f* é ...

3.3) Associa a cada uma das funções representadas, a sua expressão algébrica. Justifica a tua resposta.

(1) $y = 2x$ (2) $y = x$ (3) $y = -3$ (4) $-x + 1$

PLANO DE AULA

Duração:

- 90 minutos

Domínio:

- Gráficos de funções afins

Conteúdo:

- Revisão de conteúdos de funções do 7º ano

Ano de escolaridade:

- 8º ano

Objetivos:

Rever:

- Conceito de função e os diferentes tipos de representações para definir uma função;
- Noções de domínio, contradomínio, variável, (independente e dependente), abcissa, ordenada, origem;
- Noção de função constante, função linear, função afim.

Metodologia de trabalho:

- Trabalho em grupo/turma;
- Trabalho a pares.

Estrutura da aula:

A aula está dividida nos seguintes momentos:

- Entrada na sala de aula;
- Introdução com a apresentação da tarefa e método de trabalho;

- Trabalho autónomo dos alunos, realizado a pares, com a resolução das questões 1 e 2;
- Discussão coletiva das questões 1 e 2;
- Trabalho autónomo dos alunos, realizado a pares, com a resolução da questão 3;
- Discussão coletiva da questão 3;
- Síntese dos conceitos trabalhados em aula;
- Proposta de trabalho de exercícios do manual, caso os alunos terminem as questões antes do término da aula.

Contextualização:

Esta será a primeira aula de 8º ano dedicada ao subtópico *Gráficos de funções afins*. Pretende-se com a tarefa *De volta às funções* retomar o conceito de função como relação entre variáveis já trabalhado no 7º ano. Assim como, rever os conceitos de: domínio, contradomínio, variável independente, variável dependente, origem e os diferentes tipos de representações de uma função. Fazer a análise de uma função de proporcionalidade direta, em que o consumo de combustível varia consoante a distância percorrida, e fazer a distinção entre função constante, linear e afim.

Recursos:

Ficha de trabalho com as questões - um enunciado para cada aluno com espaço para as respostas, dadas a canetas. Projetor e documentos a projetar, nomeadamente o enunciado da questão, e documento de síntese final.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

(1) Início da aula/ apresentação da ficha de trabalho (10 minutos)

- Escrever o Sumário no quadro;
- Informar os alunos que nesta aula vão trabalhar a pares;
- Distribuir as fichas de trabalho, avisar que devem colocar o seu nome, usar os espaços reservados para as resoluções, e que os enunciados serão recolhidos no final da aula.
- Questionar a turma, sobre o que é uma função? O que é necessário para definir uma função? Como se pode representar uma função? Usar este momento para focar a turma na tarefa, tendo o cuidado de não validar as respostas, mas aproveitar os conhecimentos anteriores para motivar a adesão à tarefa. Ao longo destas questões, a professora vai escrevendo palavras chave (indicadas pelos alunos) no quadro, como

por exemplo, correspondência, domínio, etc., procurando que a turma relembre em grupo de trabalho, cada um desses conceitos e qual o seu significado no tema das funções. (Nesta fase tenho de pedir que seja fotografado o registo do quadro para confronto com o meu slide de síntese).

- Informar a turma que no final da aula, revisitaremos estes conceitos e outros que possam ter passado esquecidos e confirmaremos se as ideias transmitidas pela turma estavam ou não corretas.

Revisão de conceitos:

- Dados os conjuntos A e B, define-se uma *função f* (ou aplicação) de A em B, quando a cada elemento x de A se associa um único elemento de B que se representa por *f(x).* Aos elementos do conjunto A chamamos objetos e aos seus correspondentes, no conjunto de chegada, chamamos imagens.
- Designa-se uma função *f* de A em B por *f: A → B* ou por *f*.
- O *domínio* de uma função é o conjunto dos objetos, representa-se por D.
- O *contradomínio* de uma função é o conjunto das imagens, representa-se por CD ou D´.
- O *gráfico* de uma função *f: A → B* é o conjunto dos pares ordenados $(x; y)$ com $x \in A$ e $y = f(x)$. A variável x designa-se por variável independente e y por variável dependente.
- Função *constante* $f: IR \rightarrow IR$, tal que $f(x) = b, com\ b \in IR$, para cada $x \in IR$.
- Função *linear* $f: IR \rightarrow IR$, tal que $f(x) = ax, com\ a \in IR$, para cada $x \in IR$.
- Função *afim* $f: IR \rightarrow IR$, tal que $f(x)ax + b, com\ a, b \in IR$, para cada $x \in IR$, onde a é o coeficiente de x e b é o termo independente.

Formas de representar uma função:

  - *Tabela*: indicando para cada objeto a imagem correspondente.
  - *Diagrama de setas ou sagital*
  - *Gráfico*: A partir de cada objeto x e respetiva imagem y, obtém-se um par ordenado $(x; y)$, representa-se por G_f o conjunto de todos os pares ordenados da função.
  - *Gráfico cartesiano*: obtém-se marcando os pares ordenados $(x; y)$ correspondentes da função, no eixo das abcissas (eixo horizontal) marcam-se os valores das variáveis independentes, x, e no eixo das ordenadas (eixo vertical), marcam -se os valores das variáveis dependentes, y.

- *Expressão algébrica*: é uma expressão com variáveis que relaciona os objetos com as imagens.

- Pedir aos alunos para resolverem a tarefa a caneta e para fazerem as eventuais correções no momento de discussão coletiva, no caderno diário. Informar que dispõem de uma folha de papel milimétrico no final da ficha para as representações gráficas.
- Informar os alunos que dispõem de 15 minutos para resolver a questão 1 e 2. Decorrido este tempo será feita a discussão coletiva destas questões.
- Projetar a questão 1 e clarificar o que se pretende, questionando se existe alguma dúvida relativamente ao que é pedido.

(2) Trabalho autônomo dedicado a questão 1 e 2 (15 minutos)

A professora vai circular pela sala, monitorizando e garantindo a participação e o envolvimento dos alunos, usando o questionamento como forma de orientação, focando os alunos no objetivo da tarefa e promovendo a discussão entre os pares. Dando *feedback* e desafiando à refinação de argumentos e raciocínios, pedindo para justificarem cada um deles, mas tendo o cuidado de não reduzir o nível cognitivo da tarefa. Nesta fase, será também feita a seleção e sequenciação das produções a usar e apresentar na fase de discussão.

❖ *Relativamente aos objetivos, estratégias e dificuldades previstas na questão 1:*

Na questão 1, pretende-se que os alunos relembrem quando é que uma correspondência é uma função, e contactem com as diferentes formas de as representar. Recordem os conceitos de conjunto de partida, conjunto de chegada, domínio e contradomínio.

Resolução prevista:

(A), (B) e (D) Cada correspondência é uma função porque a cada elemento do conjunto de partida corresponde um único elemento no conjunto de chegada.

(C), (E) e (F) Não representam funções, porque existe um elemento do conjunto de partida sem correspondência única no conjunto de chegada.

Domínio (A)={−2, −1, 0, 1, 2}; Contradomínio (A)={0, 1, 4}; Conjunto partida (A)={−2, −1, 0, 1, 2}; Conjunto chegada (A)={0, 1, 4, 5}.

Não é pedido, mas pode ser focado:

Domínio (B)={−4, −3, −2, −1, 0}; Contradomínio (B)={3, 6, 9, 12} Domínio (D)=IR, Contradomínio é de -2 até +∞.

Dificuldades previstas:

- Não se lembrarem o que é o conjunto de partida e o conjunto de chegada;
- Uma correspondência é função, quando cada elemento do conjunto de partida tem uma única correspondência no conjunto de chegada.
- Na tabela, qual o significado de cada uma das colunas;
- Na representação gráfica, qual é o conjunto de partida e o de chegada;
- Em todas as correspondências é possível definir o conjunto de partida e conjunto de chegada;
- Só nas funções se pode definir o domínio e o contradomínio;
- O contradomínio nem sempre corresponde ao conjunto de chegada.

Atividades do Professor: Questões orientadoras:

- O que é uma correspondência?
- Quais os elementos envolvidos numa correspondência?
- O que define uma função?
- O que é o domínio de uma função? E o contradomínio?
- Podes definir o domínio numa correspondência que não é função?
- Porquê?

❖ *Relativamente aos objetivos da questão 2, estratégias e dificuldades previstas:*

Objetivo: fazer a leitura de uma função na forma tabular, verificando se ela é ou não uma função. Identificar as variáveis envolvidas, identificando a variável independente como a distância a percorrer (km), e a variável dependente como o consumo de combustível (litros). Fazer a passagem da representação em tabela para a representação gráfica, interpretar o gráfico obtido. Perceber que está perante uma função de proporcionalidade direta, onde a constante de proporcionalidade é $\frac{1}{8}$, e qual o seu significado no contexto do problema, terminando com a formalização da expressão algébrica que a representa.

Resolução prevista:

Distância (*km*)	8	16	24	32	40
Consumo (*l*)	1	2	3	4	5

O consumo é função da distância percorrida, porque a cada distância percorrida corresponde um único valor de consumo.

Variável independente é a distância percorrida, a variável dependente é o consumo. A expressão algébrica da função de proporcionalidade direta é $y = \frac{1}{8}x$.

Dificuldades previstas:

- Não perceberem a pergunta;
- Perceber que o consumo é função da distância, e o que representa;
- Compreender o que é a variável independente e dependente. (Apresentar um exemplo). Por exemplo: A compra de uma certa quantidade de fruta, sabendo que o preço de um quilograma de maçãs é 1,20€, e questionar quem é a variável independente e a dependente e porquê…
- Consumo ou distância, qual é a variável independente?
- Fazer a passagem da representação em tabela para a gráfica;
- Escrever a expressão algébrica que representa a função;
- Não perceberem que estão perante uma função de Proporcionalidade Direta;
- Como se relacionam as duas variáveis.

Atividades do Professor: Questões orientadoras:

- Dois litros de combustível permitem percorrer que distância?
- E se percorreres 24 km, quantos litros de combustível são necessários?
- O que significar ser a variável independente?
- E a variável dependente?
- O que necessitas para fazer a representação gráfica?
- Que tipo de função representa esta tabela?
- Necessitas marcar todos os pontos obtidos?
- O que significa dizer que o consumo é função da distância?
- Quando a distância percorrida aumenta o que acontece ao consumo?
- O que é uma expressão algébrica?
- Como podemos representar esta função por uma expressão algébrica?
- Como se relacionam as duas variáveis, se a função é de Proporcionalidade Direta?

(3) Discussão coletiva dedicada a questão 1 e 2 (20 minutos)

Questão 1:

Projetar cada uma das correspondências, e explorar, conjunto de partida, conjunto de chegada, se é ou não função, e porquê, em caso afirmativo indicar o domínio, contradomínio.

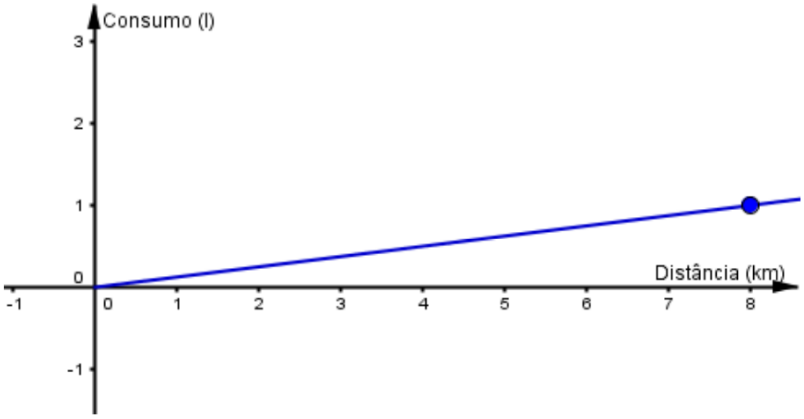
(A) Explorar que o conjunto de chegada não coincide com o contradomínio. Se um elemento do conjunto de partida não tivesse correspondência, ainda seria função?
(B) Explorar como seria o diagrama sagital da função.
(C) O porquê de não ser função.
(D) Explorar o porquê de ser função, qual o conjunto de partida e de chegada, domínio e contradomínio.
(E) Porquê de não ser função, qual ou quais as imagens do elemento 5, desenhar o correspondente diagrama sagital.
(F) O porquê de não ser função.

Questão 2:

Projetar a tabela no quadro, questionar quais os valores em falta, pedindo a justificação para cada um deles, a resposta terá de ser dada e validada pela turma, mas será escrita pela professora no quadro. Será explorado os vários pares ordenados da função, e a identificação da variável independente (distância) e variável dependente (consumo), assim como o comportamento da função. A representação gráfica será feita por um aluno, que tenha usado mais do que dois pontos para traçar o gráfico, explorando qual seria o número mínimo necessário para essa representação. Pedir para observarem a representação obtida e indicarem quais as características desta função (função de proporcionalidade direta), crescente, semirreta que passa na origem (a função só está definida para x maior ou igual a zero, será o momento para chamar a atenção para a necessidade de contextualizar o problema).

Nesta fase orientar a turma para concluir que o gráfico de uma função de proporcionalidade direta está contido numa reta não vertical que passa na origem do referencial, isto é, no gráfico de uma função linear.

Questionar se faria sentido no contexto do problema desenhar na parte negativa do eixo das abcissas e qual o significado da constante de proporcionalidade no contexto do problema. (Significado da constante de proporcionalidade: O automóvel do Senhor Paulo consome 0,125 litros de combustível por cada quilometro percorrido).



(4) Trabalho autônomo dedicado a questão 3 (15 minutos)

- Informar os alunos que têm 15 minutos para realizarem a questão 3. Esclarecer eventuais dúvidas sobre o que é pedido.
- A professora vai circular pela sala, monitorizando e garantindo a participação e o envolvimento dos alunos, através do questionamento quer individual quer coletivo. Dando *feedback* e desafiando à refinação de argumentos e raciocínios, pedindo para justificarem cada um deles, mas tendo o cuidado de não reduzir o nível cognitivo da tarefa. Nesta fase, será também feita a seleção e sequenciação das produções a usar e apresentar na fase de discussão.

❖ *Relativamente aos objetivos, estratégias e dificuldades previstas na questão 3:*

O objetivo desta questão é compreender e distinguir as diferentes funções (constante, linear e afim), perceber quais as características específicas de cada uma delas. Interpretar as suas representações gráficas e fazer a transição para a expressão algébrica.

Resolução prevista:

Função constante - $g(x)$; função linear - $f(x)$ e $h(x)$; função afim - $i(x)$.
$i(0) = 1$; $h(-2) = -2$; $i(4) = -3$; $f(-2) = -4$.
Questão 3.3 $f(x) = 2x$; $h(x) = x$; $g(x) = -3$; $i(x) = -x + 1$.

Dificuldades previstas:

- Não saber distinguir função linear de função afim;
- Não reconhecer as correspondentes expressões algébricas;

- A função é decrescente então a constante a é negativa $y = ax + b$;
- Na interpretação de $h(0)$;
- Em distinguir imagem de objeto.

Atividades do Professor: Questões orientadoras:

- Quais eram as características da função da questão 2?
- Existe alguma função aqui representada com essas características?
- Quando falamos em constante, o que significa?
- Procura uma função com essa característica.
- Se substituíres um valor na variável independente x, qual a sua imagem?
- Esse ponto pertence a qual dos gráficos?
- Qual dos eixos representa o domínio da função? E o contradomínio?
- O que é o objeto? E a imagem desse objeto?

(5) Discussão coletiva dedicada a questão 3 (15 minutos)

Projetar a imagem da questão, questionar a turma, pedindo justificação para cada uma das funções representadas, a resposta será dada e validada pela turma, mas é a professora que faz o registo no quadro. Na questão 3.2 pedir a um aluno para explicar qual o significado do que é pedido, e quais os valores correspondentes, questionando a turma sobre os resultados apresentados e a sua validação. Questionar se existe diferença quando o pedido é feito em linguagem matemática ou em linguagem natural. Na questão 3.3 pedir a um par de alunos para apresentar a sua resolução, escolhendo preferencialmente um grupo que tenha recorrido ao cálculo de valores para confirmar a expressão algébrica escolhida, e outro que tenha usado a representação gráfica.

(6) Síntese final (15 minutos)

Usar os conceitos (palavras escritas no quadro) na fase de introdução da tarefa, formalizando os conceitos chave no tema das funções. Apresentar slide 1 com algumas hipóteses dessas palavras, e a respetiva formalização do conceito.

Apresentar slide 2, fazendo síntese de três formas de representar uma função e como pode ser feita a transição entre estas representações. Usar o slide 3 para rever as principais características das três funções trabalhadas em aula, usando as respetivas representações algébricas e gráficas, evidenciando as principais diferenças. (Não esquecer de referir que estou

a apresentar alguns exemplos, para não transmitir a ideia errada *que a função linear tem sempre inclinação para a direta e que a função afim é ao contrário*).

Avaliação formativa:

A avaliação será realizada tendo com conta alguns elementos, como:

- Observação direta (atitudes reveladas, por exemplo, participação e adesão à tarefa).
- Registo áudio da atividade realizada por três pares de alunos.
- Produções elaboradas pelos alunos que decorrem da realização das questões (as fichas de trabalho serão recolhidas para posterior análise).