



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



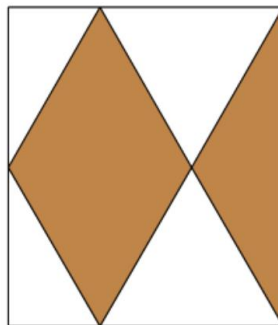
Tarefa: Quem tem razão?

Conteúdo: Sólidos geométricos; Sequências e regularidades; Equações.

Fonte: ANTUNES, A. C. M. **A Resolução de tarefas envolvendo equações do 2º Grau:** um estudo no 8º ano. 217f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade de Lisboa, Lisboa. 2013. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/9827>

TAREFA QUEM TEM RAZÃO

Os pais da Carla, ambos professores de Matemática, decidiram repavimentar o chão da cozinha com mosaicos iguais aos da figura, criando um padrão com losangos. O comprimento de cada mosaico é 1,25 vezes maior do que a largura.



- A mãe afirma que a área pintada é igual a $\frac{5}{8}$ do quadrado da medida da largura do mosaico. Por seu lado, o pai afirma que a área pintada é metade da área do mosaico. A Carla hesitou, mas rapidamente percebeu que os dois têm razão. Apresenta argumentos que mostrem que ambos têm razão.
- Supõe, agora, que a área da parte pintada de um dos mosaicos é $5,625 \text{ dm}^2$. Qual é, em centímetros, a largura de um dos mosaicos do chão da cozinha da Carla? Mostra como chegaste à tua resposta.

Adaptado de Projeto 1001 Itens, GAVE.

PLANO DE AULA

Objetos específicos:

- Conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica;



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



-
- Resolver equações literais em ordem a uma incógnita;
 - Efetuar operações com polinômios, adição algébrica e multiplicação;
 - Resolver equações (incompletas) do 2º grau a uma incógnita.

Ano de escolaridade:

- 8º ano do Ensino Fundamental Anos Finais

Recursos:

Quadro branco e marcador; Tarefa “Quem tem razão?”; Papel e lápis; Calculadora; Manual.

Capacidades transversais:

- Raciocínio matemático;
- Resolução de problemas;
- Comunicação matemática;
- Estabelecimento de conexões;
- Autorregulação das aprendizagens;
- Mecanismos de verificação;
- Sentido de responsabilidade;
- Sentido crítico;
- Argumentação sustentada;
- Autonomia.

Metodologia de trabalho:

- Trabalho a pares.

Com o desenrolar da tarefa pretendo recordar conceitos já trabalhados, nomeadamente:

- Conhecer as propriedades e as regras das operações em \mathbb{Q} e usá-las no cálculo;
- Calcular o valor de expressões numéricas que envolvam números racionais;
- Resolver problemas que envolvam polígonos e as respetivas características e áreas;
- Decomposição de polígonos;
- Compreender os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra;
- Simplificar expressões algébricas;
- Máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum;



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



- Isometrias.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

- (1) Início da aula: número das lições e data (escritos no quadro) e sumário (ditado); (3 minutos)
- (2) Apresentação/Distribuição da tarefa; (10 minutos)
- (3) Exploração da tarefa por parte dos alunos; (30 minutos)
- (4) Discussão e síntese dos resultados obtidos; (45 minutos)
- (5) Escrever o TPC no quadro (continuação da resolução dos problemas da p.158 do manual) e informar os alunos de que caso já tenham acabado a tarefa anterior, podem começar a resolver o TPC. (2 minutos)

(1) Distribuição e apresentação da tarefa e definição da metodologia de trabalho (10 minutos)

A aula terá início com a proposta de realização da tarefa de exploração “Quem tem razão?”.

Depois de distribuído o documento da tarefa, será feita a leitura do enunciado por um dos alunos da turma, com o objetivo de garantir se há alguma dúvida na linguagem, nomeadamente o significado de “repavimentar” e de “losangos”, nomeadamente, as suas características, e é explicado aos alunos que o objetivo da tarefa é apresentar argumentos que mostrem que tanto a mãe como o pai da Carla têm razão e calcular a largura de um dos mosaicos do chão da cozinha da Carla, sabendo a área da parte pintada, de um dos mosaicos.

Explica-se aos alunos que podem recorrer às estratégias (de resolução do problema) que acharem pertinente e deve ficar claro que têm de apresentar o seu raciocínio e conjecturas, assim como, a estratégia que usaram, não esquecendo a resposta ao problema.

Informa-se que serão valorizadas as apresentações de diferentes estratégias de resolução do problema e que a tarefa pode ser realizada a pares, mas os alunos (individualmente) têm que estar preparados para apresentar a sua resolução à turma.

Por fim, fica definido 30 minutos de trabalho autónomo para a realização da tarefa.



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



(2) Realização da Tarefa (30 minutos)

Pede-se aos alunos que respondam às questões na própria folha da tarefa e informem-se que poderão utilizar a calculadora e recorrer, se necessário, ao manual.

Os alunos fazem trabalho autônomo e o professor circula pela sala, esclarecendo dúvidas e apercebendo-se do progresso dos alunos.

Após os primeiros 10 minutos de realização da tarefa, o professor deve parar o trabalho autônomo dos alunos e fazer um ponto de situação e a cada 5 minutos, o professor deve alertar os alunos para o tempo que ainda têm para concluir a tarefa.

A realização de problemas com equações envolvendo áreas tem sido o foco das últimas aulas, pelo que se espera um envolvimento dos alunos na tarefa. A forma como está estruturado o enunciado permite aos alunos identificar os dados do problema que são importantes considerar, assim espera-se que os alunos interpretem que:

- Comprimento do mosaico = $1,25 \times$ largura do mosaico, logo o mosaico tem a forma de um retângulo;
- Cada mosaico tem como padrão um losango e meio.

❖ *Algumas das possíveis resoluções da Tarefa – questão a – mostrar que a mãe tem razão:*

Hipótese 1 – Aplicando a fórmula da área do losango:

c – comprimento do mosaico; l – largura do mosaico; D – comprimento da diagonal maior do losango; d – comprimento da diagonal menor do losango;

$$c = 1,25l$$

$$A_{\text{losango}} = \frac{D \times d}{2} = \frac{1,25l \times \frac{2}{3}l}{2} = \frac{5}{12}l^2$$

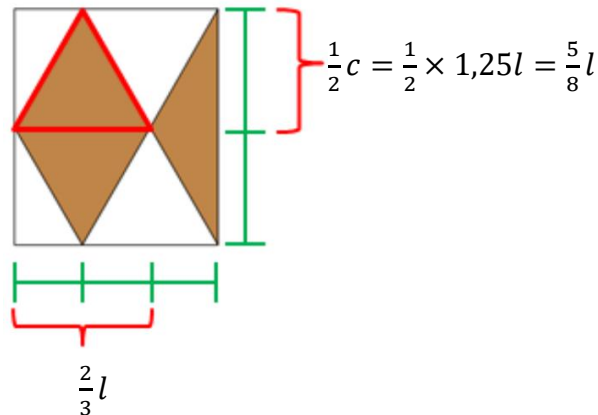
Então

$$\begin{aligned} A_{\text{parte pintada}} &= \frac{5}{12}l^2 + \frac{5}{12}l^2 = \frac{5}{12}l^2 + \frac{5}{24}l^2 = \frac{5}{8}l^2 \\ &= \frac{5}{8} \text{ o quadrado da medida da largura do mosaico} \end{aligned}$$

R: A mãe da Carla tem razão, porque cinco oitavos do quadrado da medida da largura do mosaico é o mesmo que cinco oitavos de l^2 .

Hipótese 2 – Decompondo o losango em triângulos:

c – comprimento do mosaico; l – largura do mosaico; b – base do triângulo vermelho; a – altura do triângulo vermelho;



$$A_{\text{triângulo vermelho}} = \frac{b \times a}{2} = \frac{\frac{2}{3}l \times \frac{5}{8}l}{2} = \frac{5}{24}l^2$$

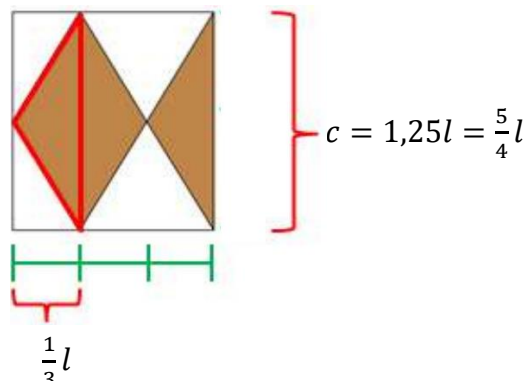
Então

$$A_{\text{parte pintada}} = A_{\text{triângulo vermelho}} \times 3 = \frac{5}{24}l^2 \times 3 = \frac{15}{24}l^2 = \frac{5}{8}l^2$$

R: A mãe da Carla tem razão, porque cinco oitavos do quadrado da medida da largura do mosaico é o mesmo que cinco oitavos de l^2 .

Hipótese 3 – Decompondo o losango em triângulos:

Esta proposta de resolução é análoga à anterior, o que difere é apenas a forma como se decompõe a figura.



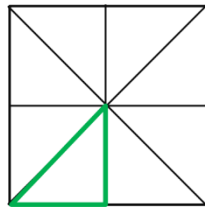
$$A_{\text{triângulo vermelho}} = \frac{b \times a}{2} = \frac{\frac{5}{4}l \times \frac{1}{3}l}{2} = \frac{5}{24}l^2$$

$$A_{\text{parte pintada}} = A_{\text{triângulo vermelho}} \times 3 = \frac{5}{24}l^2 \times 3 = \frac{15}{24}l^2 = \frac{5}{8}l^2$$

R: A mãe da Carla tem razão, porque cinco oitavos do quadrado da medida da largura do mosaico é o mesmo que cinco oitavos de l^2 .

Hipótese 4 – Usando um quadrado de lado l :

Mosaico quadrado, com o lado = l :



$$A_{\text{triângulo verde}} = \frac{b \times a}{2} = \frac{\frac{1}{2}l \times \frac{1}{2}l}{2} = \frac{1}{8}l^2$$

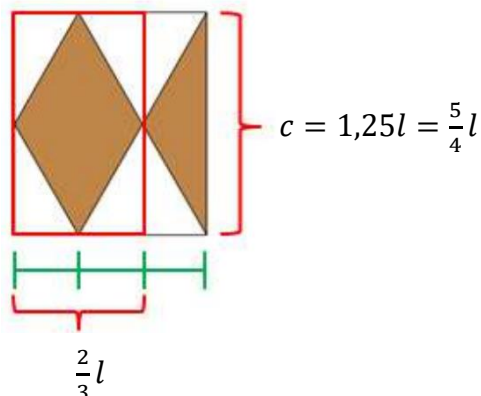
Então,

$$\text{Cinco oitavos do mosaico quadrado} = 5 \times A_{\text{triângulo verde}} = 5 \times \frac{1}{8}l^2 = \frac{5}{8}l^2$$

R: A mãe da Carla tem razão.

Hipótese 5 – Fazendo relações entre áreas:

c – comprimento do mosaico; l – largura do mosaico;





Projeto de Pesquisa:
Ensinho Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



$$A_{\text{losango}} = \frac{A_{\text{retângulo vermelho}}}{2} = \frac{c \times l}{2} = \frac{\frac{5}{4}l \times \frac{2}{3}l}{2} = \frac{5}{12}l^2$$
$$\frac{A_{\text{losango}}}{2} = \frac{\frac{5}{12}l^2}{2} = \frac{5}{24}l^2$$

Então,

$$A_{\text{parte pintada}} = A_{\text{losango}} + \frac{A_{\text{losango}}}{2} = \frac{5}{12}l^2 + \frac{5}{24}l^2 = \frac{8}{5}l^2$$

R: A mãe da Carla tem razão.

❖ *Algumas das possíveis resoluções da Tarefa – questão a – mostrar que a pai tem razão:*

Hipótese 1 – Usando o argumento da mãe prova o argumento do pai:

c – comprimento do mosaico; l – largura do mosaico;

$$c = 1,25l$$

$$A_{\text{mosaico}} = c \times l = 1,25l \times l = 1,25l^2 = \frac{5}{4}l^2$$

Então,

$$A_{\text{parte pintada}} = \text{metade da área do mosaico} = \frac{A_{\text{mosaico}}}{2} = \frac{\frac{5}{4}l^2}{2} = \frac{5}{8}l^2$$

R: O pai de Carla também tem razão, porque a área pintada do mosaico é metade da área total do mosaico.

Hipótese 2 – Partindo da área da parte não pintada do mosaico:

c – comprimento do mosaico; l – largura do mosaico;

$$c = 1,25l$$

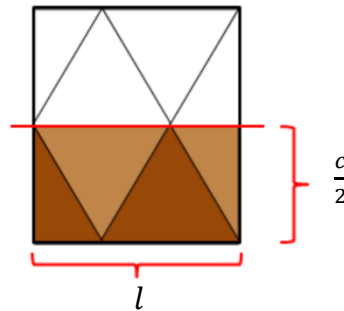
$$A_{\text{mosaico}} = c \times l = 1,25l \times l = 1,25l^2 = \frac{5}{4}l^2$$

$$A_{\text{não pintada}} = A_{\text{mosaico}} - A_{\text{pintada}} = \frac{5}{4}l^2 - \frac{5}{8}l^2 = \frac{10}{8}l^2 - \frac{5}{8}l^2 = \frac{5}{8}l^2$$

R: Como a área da parte não pintada é igual à área da parte pintada, então a área pintada do mosaico é metade da área total do mosaico, logo o pai da Carla também tem razão.

Hipótese 3 – Recorrendo à simetria de reflexão:

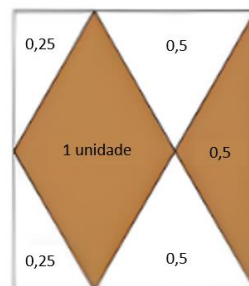
Se pudéssemos recortar a figura poderíamos reconstruí-la da seguinte forma:



R: O pai da Carla também tem razão, porque a área pintada do mosaico é metade da área total do mosaico.

Hipótese 4 – Geometricamente:

Suponhamos que a $A_{\text{losango}} = 1$ unidade.



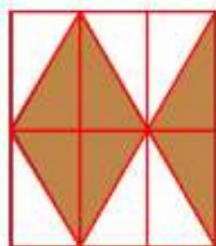
$$A_{\text{parte pintada}} = 1 + 0,5 = 1,5 \text{ unidades}$$

$$A_{\text{parte não pintada}} = 0,25 + 0,25 + 0,5 + 0,5 = 1,5 \text{ unidades}$$

R: Como ambas as áreas são iguais, então a área pintada é metade da área do mosaico, logo o pai da Carla também tem razão.

Hipótese 5 – Geometricamente:

Dividindo o mosaico em 12 triângulos retângulos escalenos (semelhantes e congruentes):



R: Obtemos seis triângulos pintados e seis triângulos brancos. Sabemos também que as áreas desses triângulos são iguais, então a área pintada é metade da área do mosaico, logo o pai da Carla também tem razão.

❖ *Algumas das possíveis resoluções da Tarefa – questão b:*

Hipótese 1 – Algebricamente:

$$A_{\text{parte pintada}} = 5,625 \text{ dm}^2 = 562,5 \text{ cm}^2$$

Pelo enunciado de a) sabemos que:

$$\begin{aligned} A_{\text{parte pintada}} &= \frac{5}{8} l^2 \Leftrightarrow 562,5 = \frac{5}{8} l^2 \Leftrightarrow l^2 = \frac{562,5 \times 8}{5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow l^2 = \frac{4500}{5} \Leftrightarrow l^2 = 900 \Leftrightarrow l\sqrt{900} \Leftrightarrow l = 30 \text{ cm} \end{aligned}$$

R: A largura de um dos mosaicos do chão da cozinha da Carla é 30 centímetros.

Nota:

- (1) Os alunos podem optar por só reduzir para centímetros no final, neste caso, obteríamos

$$\dots \Leftrightarrow l^2 = 9 \Leftrightarrow l = \sqrt{9} \Leftrightarrow l = 3 \text{ dm} \Leftrightarrow l = 30 \text{ cm};$$

- (2) Os alunos poderão desencilhar-se da raiz quadrada por tentativa erro.

Hipótese 2 – Algebricamente, mas utilizado um sistema:

Esta proposta de resolução é muito semelhante à anterior.

Os alunos poderão optar por esta resolução porque “os sistemas” foi a última matéria a ser lecionada.



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\text{parte pintada}} = 5,624 \text{ dm}^2 \\ A_{\text{parte pintada}} = \frac{5}{8} l^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{Aplicando o} \\ \text{método de} \\ \text{substituição e os} \\ \text{princípios de} \\ \text{equivalência} \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_{\text{parte pintada}} = 5,625 \text{ dm}^2 \\ l = 3 \text{ dm} = 30 \text{ cm} \end{array} \right.$$

R: A largura de um dos mosaicos do chão da cozinha da Carla é 30 centímetros.

❖ *Dificuldades na Tarefa – questão a:*

- Pode haver dificuldade na passagem da “área pintada é igual a $\frac{5}{8}$ do quadrado da medida da largura do mosaico” para a linguagem matemática. Para ultrapassar esta dificuldade deve confrontar-se o par da seguinte forma: “Quanto é o quadrado de 3?” e desta forma espera-se que o par responda 3^2 . O objetivo é levar os alunos a compreenderem que ambas as expressões têm o mesmo significado.
- Os alunos poderão ter dificuldades em perceber o que significa da fração $\frac{5}{8}$. Para ultrapassar esta dificuldade podemos questionar o par: “O que significa $\frac{5}{8}$ de uma folha de papel A4?”. O objetivo é levar os alunos a compreenderem que a fração representa a parte de um todo, podendo assim considerá-la como sendo mais uma representação de quantidade, ou seja, uma representação numérica.
- Alguns pares podem não saber como calcular a área de um losango. Para ultrapassar esta dificuldade podemos sugerir aos alunos para decompor o losango. O objetivo é levar os alunos a compreenderem que um losango pode dividir-se, por exemplo, em triângulos. E talvez seja mais fácil saber qual é a área de um triângulo.
- Alguns pares podem afirmar que a área do losango é o comprimento da diagonal maior vezes o comprimento da diagonal menor. Para ultrapassar esta dificuldade pode questionar-se os alunos da seguinte forma: “Qual é a área de um retângulo com a largura igual ao comprimento da diagonal menor e o comprimento igual à diagonal maior?”. O objetivo é levar os alunos a compreenderem que a área do um losango é metade da área de um retângulo cujos lados possuem o mesmo tamanho das diagonais do losango, e portanto, a área de qualquer losango é o semiproduto dos comprimentos das suas diagonais.
- Se a maioria dos alunos achar que só a mãe ou só o pai tem razão. Para ultrapassar esta dificuldade podemos sugerir aos alunos para ler a última frase da questão a) (“...mostrem que ambos têm razão”).



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



- Pode haver dificuldades em saber qual a medida do comprimento da diagonal menor do losango do mosaico. Para ultrapassar esta dificuldade deve confrontar-se o par da seguinte forma: “Quais as características das diagonais do losango?”. O objetivo é levar os alunos a relembrar essas características, como por exemplo, que as suas diagonais são bissetrizes. E através desta característica estabelecer uma relação com a largura do mosaico.
- Caso os alunos, tenham dificuldades em (1) calcular o valor de expressões numéricas que envolvam números racionais; (2) simplificar expressões algébricas; (3) determinar o máximo divisor comum e o (4) mínimo múltiplo comum, deve-se questioná-los da seguinte forma: “Já consultaste o manual?”. O objetivo é tornar os alunos mais autônomos.

❖ *Dificuldades na Tarefa – questão b:*

Nota: Depois de ultrapassadas as dificuldades da questão a) nesta questão terá menos dificuldades.

- Os alunos poderão ter alguma dificuldade em fazer a redução de dm^2 para cm^2 . Para ultrapassar esta dificuldade podemos devolver esta questionar à turma, de modo a, que seja a turma a responder.
- Alguns pares poderão ter dificuldades em desencilhar-se da raiz quadrada (matéria estudada no 7º ano). Para ultrapassar esta dificuldade podemos questionar os pares da seguinte forma: “ $3 \times 3 = 9$ certo? Então quanto é a raiz quadrada de 9?” ou “900 é um quadrado perfeito? Qual a relação entre os quadrados perfeitos e a raiz quadrada?”. O objetivo é ajudar os pares a dar significado e a estabelecer conexão entre os quadrados perfeitos e as raízes quadradas.
- Caso os alunos, tenham dificuldades em (1) calcular o valor de expressões numéricas que envolvam números racionais; (2) simplificar expressões algébricas; (3) determinar o máximo divisor comum e o (4) mínimo múltiplo comum, deve-se questioná-los da seguinte forma: “Já consultaste o manual?”. O objetivo é tornar os alunos mais autônomos.

(3) Discussão e síntese da Tarefa (45 minutos)

Neste momento pede-se aos alunos que porem de trabalhar.

O professor deve pedir a alguns alunos que tenham estratégias, as mais variadas possíveis, para irem ao quadro escreve-las e explicá-las à turma (de preferência um de cada



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



vez, mas se houver falta de tempo irão ao quadro dois alunos de cada vez). Caso só surja uma ou duas estratégias (tanto para a mãe como para o pai) o professor deve mostrar mais estratégias possíveis à turma.

A discussão será gerida pelo professor, mas vai ser o aluno responsável pelo par a apresentar a sua estratégia e espera-se que sejam os restantes alunos da turma a questionar o par que apresenta a resolução. Porém, caso seja necessário, o professor pode colocar questões como: “Concordam com a estratégia do(a) vosso(a) colega?”, “Como é que ele(a) pensou?” “Qual foi o ponto de partida?”, entre outras.

Como forma de ligação à apresentação de outra estratégia, o professor poderá colocar a questão: “Alguém utilizou outra estratégia?”.

Espera-se que os alunos participem procurando responder às dúvidas e questões que vão sendo colocadas pelos colegas. A maioria das questões servirão de síntese e de um revisitado dos conhecimentos já estudados (quer neste ano letivo, assim como, nos anos letivos anteriores).

Após a discussão da questão b) o professor deve questionar os alunos da seguinte forma: “Turma, estamos perante uma equação de que grau?”. Desta forma o professor começa, de uma forma muito suave e subtil, a introduzir o próximo capítulo a lecionar.

Como forma de concluir esta tarefa, o professor poderá “pegar” na solução da questão b) e perguntar à turma: (1) “Que valores ao quadrado podem dar 9?”. O objetivo é levar os alunos a compreenderem que existem duas soluções para a equação de 2.º grau da questão b). (2) “Se há duas soluções possíveis porque escolhemos apenas uma delas?”. O objetivo é levar os alunos a compreenderem o significado do +3 e do - 3, no contexto deste problema. (3) “Então uma equação do 2.º grau possível e determinada pode ter quantas soluções?”. O objetivo é levar os alunos a compreenderem a relação entre o expoente e as soluções de uma equação do 2.º grau possível e determinada.

Avaliação: A avaliação reguladora e não sumativa será feita, através, de observação direta:

- Do interesse, empenho, desempenho, sociabilidade e adesão às tarefas propostas;
- Da capacidade raciocínio e comunicação (o aluno ter a capacidade de interpretar, expressar um plano para resolver o problema, formular conjecturas e argumentar, justificando as suas respostas);

Extensão da Tarefa:



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Como extensão desta tarefa o professor poderá, sempre que achar oportuno, aproveitar momentos na discussão da tarefa, em grande-grupo, para fazer um *refresh* dos conceitos já trabalhados, nomeadamente:

- As propriedades e as regras das operações em \mathbb{Q} ;
 - O uso de expressões numéricas que envolvam números racionais;
 - Os polígonos e as respectivas características e áreas;
 - As diversas decomposições de polígonos;
 - Os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra;
 - A simplificação de expressões algébricas;
 - O máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum;
 - As diversas isometrias;
- entre outros que possam surgir.