



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Tarefa: Medindo com barras *Cuisenaire* (parte 1)

Conteúdo: Operações com Números racionais (não negativos)

Fonte: OLIVEIRA, V. S. D. **Ensino Exploratório de Matemática e tecnologias digitais:** Um olhar para a aprendizagem de frações na perspectiva da medição no contexto do ensino remoto. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual do Paraná. Campo Mourão, 2021. Disponível em: <http://prpgem.unespar.edu.br/dissertacoes/resumos/vania-sara-doneda-de-oliveira>

TAREFA MEDINDO COM BARRAS *CUISENAIRE* (PARTE 1)

2) Acessem o link <https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html>

a) Para facilitar as representações nomeiem as barras usando uma letra apenas, por exemplo, o branco, por b, o vermelho por v, e assim por diante. Mas prestem atenção, não podem repetir letras para não confundir as barras.

Anotem no quadro a representação que usaram para cada barra.

Branca = ___ **Vermelha** = ___ **Verde Clara** = ___ Rosa = ___ Amarela = ___

Verde Escuro = ___ Preta = ___ Marrom = ___ Azul = ___ Laranja = ___

b) Agora, cada integrante do grupo deve escolher uma barra e deixá-la alinhada na tela. Formem todas as combinações de barras de uma única cor que sejam do mesmo tamanho da barra escolhida por cada um dos integrantes. Para cada barra escolhida formem o máximo de combinações possíveis nessa condição.

Utilizem as representações do quadro do item a para escrever todas as representações matemáticas de equivalências possíveis.

PLANO DE AULA E QUADRO DE ORIENTAÇÕES

Duração:

- no mínimo 90 minutos e no máximo 130 minutos para a fase de introdução da tarefa e realização da tarefa



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



- no mínimo 40 minutos e no máximo 90 minutos para as fases de discussão coletiva da tarefa e sistematização das aprendizagens

Unidade temática:

- Números e Álgebra

Objetos de conhecimento:

- Números racionais (não negativos)

Conteúdo:

- Frações: nomenclatura e representação
- Frações equivalentes
- Comparação entre frações

Ano de escolaridade:

- 6º ano do Ensino Fundamental Anos Finais

Objetivos:

- Compreender a relação de equivalência e representa-las algebricamente;
- Compreender equivalência de frações;
- Compreender a representação fracionária.

Recursos:

Internet, tarefa em arquivo pdf, Google Meet para reunião, Google Sala de aula, site com *applet* das barras *Cuisenaire*, mesa digitalizadora.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

A aula será desenvolvida na perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM) que consiste em uma abordagem de ensino e aprendizagem centrado no aluno e diferente do ensino tradicional. Isto porque as práticas do EEM são orientadas por quatro dimensões: o *inquiry*, a reflexão, a comunicação e a colaboração. O *inquiry* admite que a aprendizagem ocorre na interação entre aquilo que é conhecido e desconhecido e; por meio de situações didáticas que conduzem à reflexão. A comunicação se apoia na interação social, e sustenta-se no diálogo entre professores e alunos para expressar ideias matemáticas e negociar



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



significados. E a colaboração articula todas as demais dimensões por meio de diálogos inquiridores que promovem a reflexão e a comunicação, no qual o conhecimento matemático é (re)elaborado para a resolução da tarefa.

Assim, o professor possui papel ativo durante todo o desenvolvimento da aula, mas de natureza diferente do ensino dito tradicional, isto porque além da escolha e preparo criterioso das tarefas, suas atitudes, comportamento e a forma de gerir e conduzir a aula demandam atenção e cuidado. Nesse sentido, a fim de orientar e organizar as ações do professor, os pesquisadores Canavarro, Oliveira e Menezes (2013) sugerem a aula em fases que Cyrino e Teixeira (2015) admitem como sendo quatro fases:

1ª) *Introdução da tarefa.* É o momento em que o professor explica como será o desenvolvimento da aula, a organização dos grupos, a forma como a tarefa será desenvolvida, o que acontecerá em cada fase seguinte bem como o tempo das fases de desenvolvimento e socialização da tarefa com a turma, quais os recursos disponíveis para auxiliar na resolução da tarefa, as formas de registro, como serão avaliados, além de estabelecer objetivos, procurando motivar e engajar os alunos para a resolução da tarefa.

2ª) *Realização da tarefa.* Nesta fase os alunos resolvem a tarefa em pequenos grupos, trocam ideias, estratégias, conhecimento matemático. O professor é bastante ativo, mas de forma diferente de uma aula tradicional. Para que essa fase seja bem-sucedida é indispensável que o professor se prepare antes de desenvolver essa fase em sala de aula. Essa preparação é no sentido de antecipar ideias, situações, dúvidas, conjecturas, equívocos, estratégias de resoluções dos alunos para que o professor saiba como agir e não valide ou refute ideias.

3ª) *Discussão coletiva da tarefa.* Para esse momento o professor deve selecionar, sequenciar e prever quais conexões estabelecer entre os grupos que apresentarão as resoluções da tarefa para a turma toda. O intuito é que toda a turma compreenda explicações e estratégias de resolução, sejam estas corretas ou não, para que na troca coletiva, novas negociações de significados possam emergir, promovendo a reflexão sobre as conclusões alcançadas.

4ª) *Sistematização das aprendizagens.* O papel do professor é planejar, estruturar e organizar as aprendizagens. Não basta sintetizar ideias, mas sim sistematizar e institucionalizar as aprendizagens matemáticas envolvidas em um processo de (re)construção com todos os sujeitos da sala de aula. Para isso, é importante que o professor solicite que os alunos façam os registros da sistematização, para que possam consultá-los para estudo ou utilizá-los em outras situações.

Optamos pela seguinte organização: a 1ª e 2ª fase ocorrerão com grupos de 3 a 6 alunos. Essas fases serão realizadas em sequência, em um mesmo dia, sendo necessários no



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



mínimo 90 minutos e no máximo 130 minutos. Já para a 3ª e 4ª fase serão necessários no mínimo 40 minutos e no máximo 90 minutos e serão realizadas com todos os alunos. As duas últimas fases ocorrerão em sequência, em um mesmo dia, mas em dia diferente da 1ª e 2ª fase.

(1) Introdução da tarefa

A professora iniciará a reunião via Google Meet explicando como será o desenvolvimento da aula, o tempo, a organização, recursos disponíveis, as fases seguintes de Realização da tarefa e Discussão coletiva da tarefa, além da forma de registro e a forma de avaliação. Será explicado aos alunos que todas as aulas serão gravadas, como lhes foi explicado na carta de informações ao sujeito de pesquisa, quando os alunos assinaram o termo de assentimento e os pais o termo de consentimento. Será ressaltada a importância do registro escrito, digitado ou fotografado e bem detalhado pelo grupo, já que alguns irão compartilhar e apresentar suas resoluções com a turma, no momento da fase de Discussão coletiva da tarefa. Após essa explicação será disponibilizada a tarefa ao grupo.

A professora fará a leitura com os alunos da tarefa esclarecendo interpretações e/ou dúvidas, de forma que os alunos compreendam claramente aquilo que precisa ser feito e se apropriem da tarefa. As instruções de uso do *applet* encontram-se no apêndice 1 (Plano de Ensino da Tarefa 1).

(2) Realização da tarefa

Com o objetivo de nortear o desenvolvimento da tarefa prevendo possíveis ações por parte dos alunos e do professor, a perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática prevê a utilização de um quadro de antecipação/orientação para cada tarefa proposta. A professora usará o quadro de antecipação como referência de como (re)agir, o que esclarecer, como questionar sobre as estratégias de resolução da tarefa, como pedir justificativas para que os objetivos da tarefa sejam atingidos. Tal quadro foi aprovado pelo grupo de estudos GEPTeMatE.

2) Acessem o link <https://nrich.maths.org/cuisenaire/responsive.html>

- a) Para facilitar as representações nomeiem as barras usando uma letra apenas, por exemplo, o branco, por b, o vermelho por v, e assim por diante. Mas prestem atenção, não podem repetir letras para não confundir as barras.

Anotem no quadro a representação que usaram para cada barra.



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
 Financiamento:
 Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
 Tecnológico - CNPq



Branca = ____	Vermelha = ____	Verde Clara = ____	Rosa = ____	Amarela = ____
Verde Escuro = ____	Preta = ____	Marrom = ____	Azul = ____	Laranja = ____

<i>Ações do aluno</i>	<i>Ações do professor</i>
Escolhem letras repetidas.	Pedir para que releiam novamente o enunciado e não repitam letras.
Escolhem letras não repetidas.	Questionar o que os motivou a escolherem essas letras.

- b) Agora, cada integrante do grupo deve escolher uma barra e deixá-la alinhada na tela. Formem todas as combinações de barras de uma única cor que sejam do mesmo tamanho da barra escolhida por cada um dos integrantes. Para cada barra escolhida formem o máximo de combinações possíveis nessa condição. Utilizem as representações do quadro do item *a* para escrever todas as representações matemáticas de equivalências possíveis.

<i>Ações do aluno</i>	<i>Ações do professor</i>
Usam combinações de barras que não são do mesmo tamanho que a barra escolhida.	Pedir para que os alunos releiam o enunciado e percebam que as combinações de barras devem ser do mesmo tamanho da barra escolhida.
Usam combinações de barras que são do mesmo tamanho que a barra escolhida, mas que não são da mesma cor.	Pedir para que os alunos releiam o enunciado e percebam que as combinações de barras devem ser da mesma cor.
Usam combinações de barras que são do mesmo tamanho e da mesma cor que a barra escolhida, mas não formam todas as possibilidades de mesmo tamanho.	Incentivar os alunos a procurarem outras possibilidades, questionando se já tentaram alternativas e seu resultado. Exemplo: Vocês já tentaram barras da cor vermelha? e da cor azul?



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



<i>Ações do aluno</i>	<i>Ações do professor</i>
Usam combinações de barras que são do mesmo tamanho e da mesma cor que a barra escolhida e formam todas as possibilidades.	Questionar se realmente formaram todas as possibilidades. Questionar como chegaram a essa conclusão. Incentivá-los a registrar todas as representações matemáticas de equivalências.
Não compreendem como deve ser feita a representação matemática das equivalências utilizando as letras do item a .	Pedir para que olhem para as equivalências que fizeram e digam o que estão vendo. Exemplo, uma barra marrom tem o mesmo tamanho de quantas barras rosas? E uma rosa tem que tamanho da marrom? Verificar que letra utilizaram para a barra marrom e para a rosa; pedir para que substituam a palavra barra marrom e barra rosa pela letra correspondente escolhida pelo grupo e a expressão “do mesmo tamanho” por um símbolo matemático.
Fazem as representações matemáticas de equivalência utilizando as letras do item a e o sinal de igual (=), mas fazem apenas a relacionando a barra maior para a menor.	Questionar como seria a representação matemática de equivalência relacionando a barra menor para a maior. Exemplo, uma barra marrom tem o mesmo tamanho de duas barras rosas ou uma rosa tem que tamanho da marrom?
Fazem as representações matemáticas de equivalência utilizando as letras do item a e o sinal de igual (=), relacionando tanto a barra maior para a menor quanto da menor para a maior barra.	Questionar se isso faz sentido e se facilita a compreensão e/ou comunicação. Questionar o que é possível afirmar sobre as cores das barras e a quantidades de possibilidades de barras de mesma cor que juntas têm a mesma medida da barra escolhida.
Percebem que algumas barras têm mais quantidades de possibilidades de barras de mesma cor que juntas têm a mesma medida da barra escolhida.	Questionar por que isso acontece. Incentivá-los a estabelecer uma generalização.



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



<i>Ações do aluno</i>	<i>Ações do professor</i>
Identificam as frações equivalentes, mas não registram as representações matemáticas de equivalência com o sinal de igualdade.	Questionar o que estão representando. Questionar que símbolo matemático pode ser utilizado para representar a equivalência.

(3) Discussão coletiva da tarefa

Essa é a etapa mais desafiante para o professor, porque ele precisa além de organizar as apresentações de forma a atingir o objetivo da tarefa em um processo de (re)construção das relações matemáticas, estabelecendo conexões entre as apresentações, visando o desenvolvimento do conhecimento e pensamento matemático dos alunos.

Visto que a Realização da tarefa e a Discussão coletiva da tarefa ocorrerão em dias diferentes, com intervalo de ao menos um dia entre elas, os grupos que apresentarão serão selecionados pela professora considerando suas resoluções levando em consideração estratégias diferenciadas que foram desenvolvidas pelos grupos, sejam elas corretas ou equivocadas, as representações que sejam ou não eficazes, além de erros possíveis de serem explorados, e favoreçam as discussões e contribuam para atingir o objetivo da tarefa. Os critérios utilizados na seleção serão elencados a partir das resoluções e elencados e sistematizados posteriormente no quadro a seguir.

	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4
Percebem que podem utilizar múltiplos ou divisores para realizar as comparações				
Fazem as medições por tentativa e erro				
Representação eficaz				
Representação não eficaz				
Erros a explorar				



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq

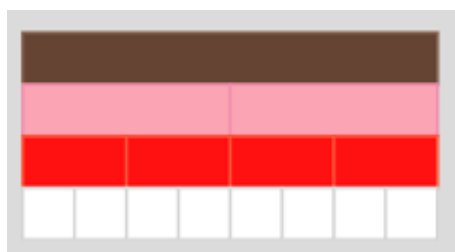


Como a proposta da tarefa é que os grupos escolham barras e a partir dessa escolha façam as representações matemáticas para todas as equivalências possíveis. A professora procurará entre os grupos, escolhas de barras de cores diferentes. Assim a turma poderá discutir todas as relações de equivalência para todas as barras, mesmo que seu grupo não tenha escolhido determinada cor.

Aqui a professora destacará as representações algébricas realizadas pelos grupos, objetivando relacionar tanto da barra menor em relação à barra maior quanto da barra maior para a menor. Por exemplo, ao comparar a barra laranja com a amarela, tem-se as notações:



Outras possibilidades de notação, que poderão ser exploradas de acordo com o que os grupos fizerem, são por exemplo:



$$1m = 2r = 4v = 8b \rightarrow 1m = \frac{2}{2}m =$$
$$\frac{4}{4}m = \frac{8}{8}m$$
$$\frac{1}{2}m = \frac{2}{4}m = \frac{4}{8}m$$
$$\frac{1}{2}m + \frac{1}{4}m = \frac{3}{4}m = \frac{6}{8}m$$

(4) Sistematização das aprendizagens

Após finalizar a fase de Discussão coletiva da tarefa a professora iniciará a fase da Sistematização das aprendizagens tendo em mente as discussões e intervenções realizada pela professora durante as fases anteriores.

Quanto ao item *a* da tarefa, a professora em acordo com os alunos padronizará as letras junto com a turma observando quais letras foram mais comuns entre os grupos, discutindo a importância da padronização, para que todos entendam a linguagem matemática utilizada. Esse quadro deverá ser registrado pelos alunos.

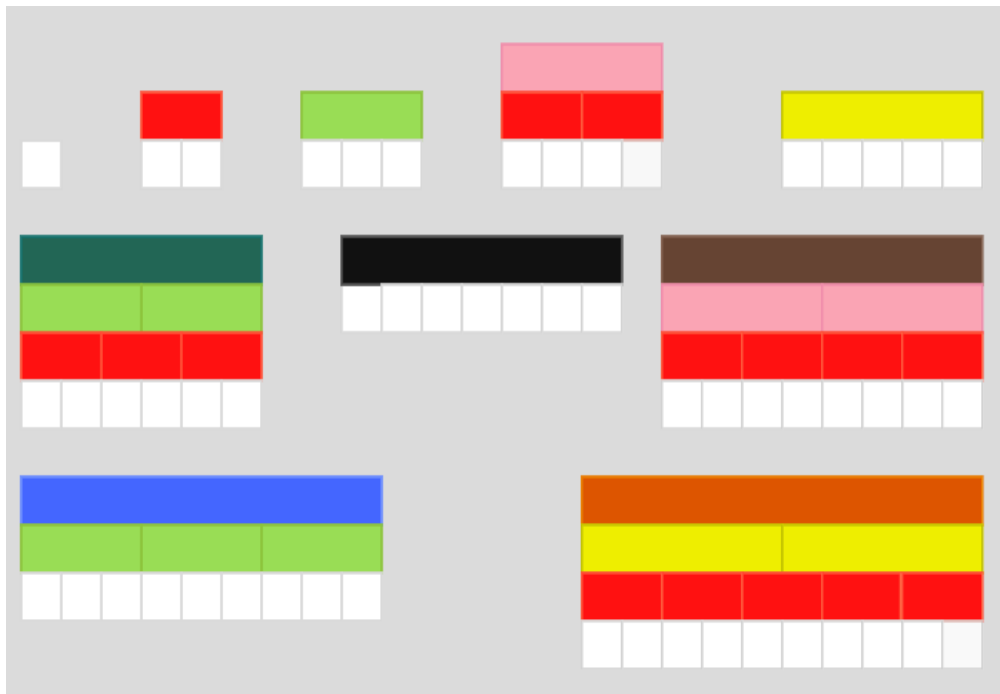


Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



Branca = b	Vermelha = v	Verde-Clara = c	Rosa = r	Amarela = a
Verde-Escuro = e	Preta = p	Marrom = m	Azul = z	Laranja = l

Para os itens *b* da tarefa, temos que:



A partir das representações acima, a professora construirá o quadro a seguir para que os alunos percebam todas as representações de todos os pares de barras equivalentes. É importante ressaltar que com isso evocamos o sentido de relação, isto é, a comparação multiplicativa entre duas quantidades comensuráveis, fundamentado na ideia de magnitude de frações, além de promover o pensamento proporcional. No quadro, primeiramente o professor estabelecerá as relações algébricas equivalentes, comparando as barras e depois as frações equivalentes chamando a atenção dos alunos para o todo.

Os alunos deverão registrar no caderno o quadro e os textos que seguem:



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
 Financiamento:
 Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
 Tecnológico - CNPq

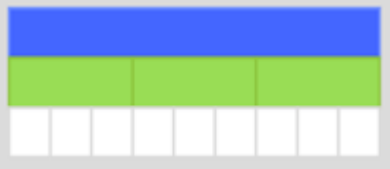
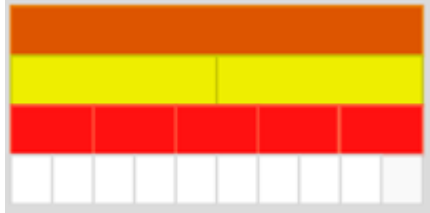


<i>EQUIVALÊNCIAS</i>			
 $v = 2b$ $b = \frac{1}{2}v$ $1 = \frac{2}{2}$	 $c = 3b$ $b = \frac{1}{3}c$ $1 = \frac{3}{3}$	 $r = 2v = 4b$ $v = \frac{1}{2}r$ $b = \frac{1}{4}r$ $v = 2b$ $b = \frac{1}{2}v$ $2b = \frac{1}{2}r$ $1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4}$ $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$	 $a = 5b$ $b = \frac{1}{5}a$ $1 = \frac{5}{5}$
 $e = 2c = 3v = 6b$ $c = \frac{1}{2}e$ $v = \frac{1}{3}e$ $b = \frac{1}{6}e$ $2c = 3v = 6b$ $c = 3b$ $b = \frac{1}{3}c$ $v = 2b$ $b = \frac{1}{2}v$	 $p = 7b$ $b = \frac{1}{7}p$	 $m = 2r = 4v = 8b$ $r = \frac{1}{2}m$ $v = \frac{1}{4}m$ $b = \frac{1}{8}m$ $2r = 4v = 8b$ $r = 2v = 4b$ $v = \frac{1}{2}r$ $b = \frac{1}{4}r$ $2b = \frac{1}{2}r$ $4v = 8b$	



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
 Financiamento:
 Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
 Tecnológico - CNPq



<i>EQUIVALÊNCIAS</i>	
$1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{6}{6}$ $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$	$3v = 6b$ $2v = 4b$ $v = 2b$ $b = \frac{1}{2}v$ $1 = \frac{2}{2} = \frac{4}{4} = \frac{8}{8}$ $\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$
 $z = 3c = 9b$ $c = \frac{1}{3}z$ $b = \frac{1}{9}z$ $3c = 9b$ $c = 3b$ $b = \frac{1}{3}c$ $1 = \frac{3}{3} = \frac{9}{9}$ $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$ $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$	 $l = 2a = 5v = 10b$ $a = \frac{1}{2}l$ $v = \frac{1}{5}l$ $b = \frac{1}{10}l$ $2a = 10b$ $a = 5b$ $b = \frac{1}{5}a$ $5v = 10b$ $4v = 8b$ $3v = 6b$ $2v = 4b$ $v = 2b$ $b = \frac{1}{2}v$ $1 = \frac{2}{2} = \frac{5}{5} = \frac{10}{10}$ $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$



Projeto de Pesquisa:
Ensino Exploratório de Matemática na Educação Básica
Financiamento:
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e
Tecnológico - CNPq



<i>EQUIVALÊNCIAS</i>	
	$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$
	$\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$
	$\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$

Frações equivalentes são frações que representam a mesma medida. Dessa forma, observando a barra laranja, por exemplo, notamos que $1 = \frac{2}{2} = \frac{5}{5} = \frac{10}{10}$, ou seja, uma barra laranja é equivalente a: $\frac{2}{2}$ da barra amarela, $\frac{5}{5}$ da barra vermelha, $\frac{10}{10}$ da barra branca. Ainda temos outras equivalências como $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$, ou seja, duas barras vermelhas é equivalente a quatro barras brancas.

É importante compreender que, apesar da fração ser escrita com dois algarismos, trata-se de um único número, sendo que o algarismo que está acima da barra é o numerador e o algarismo abaixo da barra é o denominador.

Assim, na fração $\frac{1}{2}$ (um meio), temos que 1 é o numerador e 2 é o denominador. Na fração $\frac{2}{4}$ (dois quartos), 2 é o numerador e 4 é o denominador. Na fração $\frac{8}{5}$ (oito quintos), 8 é o numerador e 5 é o denominador. O denominador denomina a fração!

Avaliação:

A avaliação ocorrerá durante todo o processo. Será observado o comprometimento, o engajamento, a interação e procedimentos individuais e coletivos durante as fases de desenvolvimento da aula. Os registros escritos das resoluções dos grupos serão enviados a professora, por meio da plataforma Google Sala de Aula e poderão ser alterados e/ou complementados após a Sistematização e novamente enviados para a professora por meio da mesma plataforma e, serão também considerados para a avaliação.